BA3 Sciences Mathématiques 2021-2022

MATH-F3002

Espaces fonctionnels et analyse de Fourier

Exercices

Version : 2 août 2022

Dimitri KONEN
dimitri.konen@ulb.be
NO.9.216

Département de Mathématiques
Université Libre de Bruxelles

Table des matières

1 Quelques notations

Etant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on désignera par $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ ou $\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dont le support est compact et inclus dans Ω. L'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$ dont le support est compact et inclus dans Ω sera noté $\mathscr{C}_c^k(\Omega)$.

Sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ on notera la σ-algèbre des ensembles boréliens par $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

La fonction plancher est définie, pour tout $x \geq 0$, comme $\lfloor x \rfloor := \sup\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$. On a évidemment que $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

Le symbole $\lesssim$ signifie “plus petit ou égal à une constante près, qui ne dépend pas des quantités importantes intervenant dans l'inégalité”. Par exemple, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $|x_n| \leq \frac{4}{n}$ pour tout $n \geq 1$, on écrira

$$|x_n| \lesssim \frac{1}{n}.$$

Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, on définit la moyenne de u sur A par

$$\fint_A u(x)\,dx := \frac{1}{\lambda(A)} \int_A u(x)\,dx, \quad A \in \mathcal{R}.$$

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $|\alpha| := \sum_{j=1}^n |\alpha_j|$ sa longueur. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et si $f : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}^k(\Omega)$, on note, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$,

$$\partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}(x),$$

où $\partial_{x_j}^0$ est à lire, par convention, comme l'absence de dérivation partielle par rapport à x_j. Cette notation ne pose pas de problème d'interprétation puisque, f étant de classe $\mathscr{C}^k(\Omega)$, l'ordre de dérivation n'a pas d'importance.

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On écrit $f(x) = o(g(x))$ lorsque $x \to \infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $D > 0$ tel que $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ pour tout $x > D$. Si $\liminf_{x\to\infty} g(x) > 0$, cela revient à dire que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On écrit $f(x) = O(f(x))$ lorsque $x \to \infty$ s'il existe $C > 0$ et $D > 0$ tels que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ pour tout $x > D$. De même, si $\liminf_{x\to\infty} g(x) > 0$, cela revient à dire que

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C.$$

2 Rappels et compléments d'analyse

2.1 Topologie métrique

Soit (X, d) un espace métrique. Un ensemble $E \subset X$ est compact (défini en termes de recouvrements) si et seulement si de toute suite de E on peut extraire une sous-suite convergeant dans E. Un compact de X est toujours fermé et borné. Si X est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors $E \subset X$ est compact si et seulement si E est fermé et borné. En particulier, les boules fermées et la sphère de $\mathbb{R}^n$ sont compactes.

Si X est un espace vectoriel de dimension infinie, ni la boule fermée ni la sphère ne sont compactes (alors qu'elles sont bien fermées et bornées). On en motive la raison dans le cas, plus simple, ou la norme sur X dérive d'un produit d'un scalaire. Dans ce cas, considérons $(e_n) \subset X$ une suite de vecteurs deux à deux orthogonaux (une telle suite existe toujours car tout espace vectoriel admet une base, de laquelle on peut en tout cas extraire une collection dénombrable et l'orthoganliser par le procédé de Gram-Schmidt) et tels que $\|e_n\| = 1$ pour tout n, i.e. (e_n) est dans la sphère unité de X. Si (e_n) converge dans X, alors (e_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon \in (0, 1)$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|e_{n+p} - e_n\|^2 < \varepsilon^2$ pour tout $n \geq N$ et tout $p \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, on a

$$\|e_{n+p} - e_n\|^2 = \|e_{n+p}\|^2 - \langle e_{n+p}, e_n\rangle - \langle e_n, e_{n+p}\rangle + \|e_n\|^2 = 2,$$

une contradiction. Par conséquent, la sphère unité (et donc aussi la boule unité fermée) admet une suite qui n'admet aucune sous-suite convergente et n'est donc pas compacte.

Dans un espace métrique (X, d) on rappelle qu'une fonction $u : X \to \mathbb{C}$ est dite *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ pour lequel $|u(x_2) - u(x_1)| < \varepsilon$ dès que $d(x_1, x_2) < \delta$. En particulier, une fonction uniformément continue sur X est continue sur X. La réciproque est fausse en général. La continuité uniforme peut s'exprimer en termes de suites de la façon suivante. Une fonction $u : X \to \mathbb{C}$ est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites $(x_n), (y_n) \subset X$ telles que $d(x_n, y_n) \to 0$, on a $|u(y_n) - u(x_n)| \to 0$. Cette caractérisation en termes de suite est utile dans certaines applications.

On rappelle maintenant un célèbre et important théorème.

Théorème 2.1. Soient (X, d) un espace métrique et $K \subset X$ un compact. Si $f \in \mathscr{C}^0(K)$, alors f est uniformément continue sur K.

Exercice 2.2. Justifiez que la fonction $f : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue. Toutefois, f est uniformément continue sur $[0, 1]$. Est-ce une contradiction ?

Rappelons qu'un espace topologique est dit *séparable* lorsqu'il admet un sous-ensemble dense et dénombrable. Cette terminologie est à ne pas confondre avec la séparabilité au sens de Haussdorff des espaces topologiques (que l'on qualifiera simplement de Hausdorff plutôt que de séparable).

Un espace topologique M est *Lindelöf* lorsque de tout recouvrement de M par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable. En particulier, tout compact d'un espace topologique est Lindelöf. Etre Lindelöf est une version plus faible de la compacité mais qui s'avère suffisante dans un bon nombre de situations.

Théorème 2.3. Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est Lindelöf si et seulement si X est séparable.

En particulier si X est lui-même séparable, alors comme tout sous-ensemble E de X muni de la métrique d restreinte à E est un espace métrique séparable, on a que tout sous-ensemble d'un espace métrique séparable est Lindelöf. Par exemple, tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est Lindelöf.

Proposition 2.4. Soit V un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\Omega \subset V$ un ouvert. Alors Ω est connexe si et seulement si Ω est connexe par arcs.

Cette proposition ne s'applique qu'aux ouverts !

Exercice 2.5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $K \subset \Omega$ un compact.

1. Montrez que $d(K, \partial\Omega) > 0$, où la distance $d(A, B)$ entre deux parties $A, B \subset \mathbb{R}^n$ est
$$d(A, B) := \inf\{\|x - y\| : x \in A, y \in B\}.$$
2. Etant donné $\delta > 0$, justifiez que $K^\delta := \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, K) < \delta\}$ est ouvert, borné et que $K \subset K^\delta$. Décrivez géométriquement K^δ.

2.2 Calcul différentiel et intégral

2.2.1 Espaces de dérivées

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}^p, x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$ une fonction. On dit que f est différentiable en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $L_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^p$ telle que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - L_a(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Si f est différentiable en a, alors en particulier f est dérivable dans toutes les directions, et on a $L_a(v) = J_f(a)v$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, où $J_f(a)$ est la Jacobienne de f en a, définie comme la matrice à coefficients complexes de taille $p \times n$

$$J_f(a) := \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_p(a) & \dots & \partial_n f_p(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(a)^T \\ \vdots \\ \nabla f_p(a)^T \end{bmatrix},$$

où l'on a implicitement utilisé la convention que les vecteurs sont représentés en colonnes et pas en lignes. On écrit donc $v^T = (v_1, \dots, v_\ell)$ et

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_\ell \end{bmatrix}.$$

L'ensemble des fonctions $f : U \to \mathbb{C}^p$ différentiables en tout point de U et dont toutes les dérivées partielles sont continues sur U est noté $\mathscr{C}^1(U, \mathbb{C}^p)$ ou simplement $\mathscr{C}^1(U)$ lorsque $p = 1$. La continuité des dérivées partielles suffit à garantir la continuité de toutes les dérivées directionnelles. En effet, il est facile de voir que $(\partial_v f)(x) = L_x(v) = J_f(x)v$, avec $x \mapsto J_f(x)$ continue.

Pour $k \geq 2$, on définit l'espace $\mathscr{C}^k(U, \mathbb{C}^p)$ récursivement comme l'ensemble des fonctions $f : U \to \mathbb{C}^p$ appartenant à $\mathscr{C}^{k-1}(U, \mathbb{C}^p)$ dont toutes les dérivées partielles $\{\partial^\alpha f : U \to \mathbb{C}^p \mid \alpha \in$

$\mathbb{N}^n, |\alpha| = k-1\}$ d'ordre $k-1$ sont de classe $\mathscr{C}^1(U, \mathbb{C}^p)$.

Lorsqu'une fonction $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ définie sur l'adhérence d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jouit d'une certaine régularité dans son intérieur, disons que f est de classe $\mathscr{C}^k(\Omega)$, il arrive qu'on soit amené à requérir pour f de la régularité allant jusqu'au bord de Ω. Typiquement, f est continue sur $\overline{\Omega}$ ce qui garantit l'intégrabilité de f sur tout compact mais ∇f, définie sur $\Omega = \operatorname{int}(\overline{\Omega})$, ne s'étend pas nécessairement de façon continue jusqu'au bord de Ω de sorte que l'intégrabilité de ∇f sur un compact arbitraire n'est pas garantie. Cette situation n'a rien d'exceptionnelle et est même très courante, comme en témoigne la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur le fermé $[0, \infty[$, continue sur $[0, \infty]$, de classe $\mathscr{C}^1(]0, \infty[)$, mais dont la dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ne s'étend pas continûement jusque $x = 0$.

Les classes de régularité $\mathscr{C}^k(\overline{\Omega})$, que nous allons introduire dans un instant, satisfont les exigences mentionnées ci-dessus. Avant toute chose, nous avons besoin du lemme suivant, qui sera la clé de la définition de ces espaces.

Lemme 2.6. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $u : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction uniformément continue sur Ω. Il existe une fonction $\bar{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ uniformément continue telle que $\bar{u}_{|\Omega} = u$.

Preuve du Lemme 2.6. Fixons $x \in \overline{\Omega}$. Si $x \in \Omega$, on définit évidemment $\bar{u}(x) := u(x)$. Si $x \in \partial\Omega$, on considère une suite $(x_n) \subset \Omega$ qui converge vers x et on pose naturellement $\bar{u}(x) := \lim_{n\to\infty} u(x_n)$, pourvu que cette dernière limite existe. En effet, la suite $(u(x_n))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc convergente. Pour le voir, fixons $\varepsilon > 0$. Comme u est uniformément continue sur Ω, il existe $\delta > 0$ tel que $|u(z_2) - u(z_1)| < \varepsilon$ pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$ vérifiant $\|z_2 - z_1\| < \delta$. Puisque la suite (x_n) converge, elle est de Cauchy. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_{n+p} - x_n\| < \delta$ pour tout $n \geq N$ et tout $p \in \mathbb{N}$. Il suit donc que $|u(x_{n+p}) - u(x_n)| < \varepsilon$, ce qui conclut que $(u(x_n))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$.

Vérifions maintenant que $\bar{u}(x)$ est bien défini, i.e. que sa valeur ne dépend pas de la suite (x_n) convergeant vers x choisie pour définir $\bar{u}(x)$. Pour ce faire, considérons une autre suite $(y_n) \subset \Omega$ qui converge vers x. Par inégalité triangulaire, on a que $\|y_n - x_n\| \to 0$. Il suit alors de la continuité uniforme de u que $|u(y_n) - u(x_n)| \to 0$. Puisque $(u(x_n))_n$ converge, on en déduit que $(u(y_n))_n$ converge également et, de plus, que $\lim_{n\to\infty} u(y_n) = \lim_{n\to\infty} u(x_n)$.

Il reste à voir que $\bar{u}$ est uniformément continue sur $\overline{\Omega}$. Pour ce faire, considérons deux suites $(x_n), (y_n) \subset \Omega$ telles que $\|y_n - x_n\| \to 0$. Montrons que $|u(y_n) - u(x_n)| \to 0$. Pour ce faire, fixons $n \in \mathbb{N}$. Comme $x_n, y_n \in \overline{\Omega}$, il existe deux suites $(a_k^{(n)})_k, (b_k^{(n)})_k \subset \Omega$ telles que $a_k^{(n)} \to x_n$ et $b_k^{(n)} \to y_n$ lorsque $k \to \infty$. Par construction de $\bar{u}$, on a

$$\bar{u}(x_n) = \lim_{k\to\infty} u(a_k^{(n)}) \quad \text{et} \quad \bar{u}(y_n) = \lim_{k\to\infty} u(b_k^{(n)}).$$

Posons $k_0 := 0$. Pour tout $n \geq 1$, choisissons inductivement $k_n > k_{n-1}$ de telle sorte que

$$|\bar{u}(x_n) - u(a_{k_n}^{(n)})| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|x_n - a_{k_n}^{(n)}\| < \frac{1}{n}.$$

Il est clair que (k_n) peut être choisie de façon à ce qu'on ait, de plus,

$$|\bar{u}(y_n) - u(b_{k_n}^{(n)})| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|y_n - b_{k_n}^{(n)}\| < \frac{1}{n}$$

pour tout $n \geq 1$. On a alors

$$\bar{u}(y_n) - \bar{u}(x_n) = \underbrace{\Big(\bar{u}(y_n) - u(b_{k_n}^{(n)})\Big)}_{\to 0} + \Big(u(b_{k_n}^{(n)}) - u(a_{k_n}^{(n)})\Big) + \underbrace{\Big(u(a_{k_n}^{(n)}) - \bar{u}(x_n)\Big)}_{\to 0}$$

Il reste à voir que $u(b_{k_n}^{(n)}) - u(a_{k_n}^{(n)}) \to 0$. Ceci se déduit de la continuité uniforme de u sur Ω et du fait que $|b_{k_n}^{(n)} - a_{k_n}^{(n)}| \to 0$ puisque $|b_{k_n}^{(n)} - a_{k_n}^{(n)}| \leq |b_{k_n}^{(n)} - y_n| + |y_n - x_n| + |x_n - a_{k_n}^{(n)}| \to 0$. ■

Nous sommes maintenant en mesure de définir les espaces $\mathscr{C}^k(\overline{\Omega})$ offrant une régularité de dérivation jusqu'au bord du domaine.

Définition 2.7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $k \geq 1$ un entier. On appelle $\mathscr{C}^k(\overline{\Omega})$ l'ensemble des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^k(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles $\{\partial^\alpha u : \Omega \to \mathbb{C} \mid \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k\}$ sont uniformément continues sur Ω.

Le Lemme 2.6 garantit alors que toutes les dérivées partielles d'une fonction de $\mathscr{C}^k(\overline{\Omega})$ peuvent être considérées comme continues sur $\overline{\Omega}$, bien que définies comme limite d'un quotient différentiel uniquement sur Ω.

2.2.2 Théorème fondamental

Théorème 2.8 (Théorème fondamental dans $\mathbb{R}$)**.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $[a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(s)\,ds$ est continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathscr{C}^1(]a, b[)$. De plus,

$$\frac{d}{dx}\Big(\int_a^x f(s)\,ds\Big) = f(x)$$

pour tout $x \in\ ]a, b[$.

De ce théorème, on déduit immédiatement que si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1([a, b])$, alors

$$g(y) - g(x) = \int_x^y g'(s)\,ds \tag{2.1}$$

pour tous $x, y \in [a, b]$ (les valeurs extrêmes a et b sont admises étant donné que l'hypothèse $g \in \mathscr{C}^1([a, b])$ garantit que g' se prolonge en une fonction continue sur $[a, b]$). Le changement de variable $s = x + t(y - x)$ livre alors

$$g(y) - g(x) = (y - x)\int_0^1 g'(x + t(y - x))\,dt. \tag{2.2}$$

Théorème 2.9 (Dérivation en chaîne)**.** Soient $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_p \subset \mathbb{R}^p$ des ouverts et $a \in \Omega_n$ un point. Soient $f : \Omega_n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \Omega_p \to \mathbb{R}^s$ des fonctions telles qu'il existe $r > 0$ pour lequel $B_n(a, r) \subset \Omega_n$ et $f(B_n(a, r)) \subset \Omega_p$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ est différentiable en a et

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a).$$

En particulier, si $h : U \subset \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1(U)$ et si $\varphi : [a, b] \to U$ est un chemin (donc continu) de classe $\mathscr{C}^1(]a, b[)$, alors $h \circ \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1(]a, b[)$ et $(h \circ \varphi)'(t)$ est égal au produit matriciel de $(\nabla h)(\varphi(t))^T$ avec $\varphi'(t)$, i.e.

$$(h \circ \varphi)'(t) = \langle(\nabla h)(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle = \sum_{k=1}^{\ell}(\partial_k h)(\varphi(t))\varphi_k'(t).$$

Ces résultats mis ensemble permettent alors aisément de démontrer le *Théorème Fondamental de l'Analyse* en dimension $n \geq 1$.

Théorème 2.10 (Théorème fondamental dans $\mathbb{R}^n$)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1(\Omega)$. Soient $x, y \in \Omega$ et $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ un chemin de classe $\mathscr{C}^1(]0, 1[)$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Alors

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt. \tag{2.3}$$

En particulier,

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \langle (\nabla f)(x + t(y - x)), y - x \rangle \, dt. \tag{2.4}$$

L'hypothèse de connexité peut sembler surprenante et inhabituelle au premier regard. Toutefois, il est important de remarquer que l'existence d'un chemin dans Ω reliant x et y, arbitrairement choisis, implique nécessairement la connexité de Ω puisque les ensembles connexes par arcs sont connexes. Par ailleurs, il est suffisant que Ω soit connexe puisque Ω est alors connexe par arcs, par la Proposition 2.4, et on peut écrire (2.3).

Remarquez la similitude entre (2.4) et (2.2). Il ressort du théorème qui vient d'être énocné que, de (2.2) ou de (2.1), c'est la forme donnée en (2.2) qui est la plus naturelle. En effet, en dimension $n > 1$, il n'est pas possible de définir un analogue de $\int_x^y f(s)\, ds$ autrement que par (2.4), puisque toute intégrale sur le segment $[x, y] := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}$ serait nulle etant donné que $[x, y]$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^n$.

En physique, l'intégrale (2.3) s'écrit parfois

$$\int_\gamma \overrightarrow{\nabla f} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

et est appelée "la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{\nabla f}$ le long de γ", où $\overrightarrow{d\ell}$ est interprété comme "l'élement de longueur le long de γ" et on écrit formellement $\overrightarrow{d\ell} = \gamma'(t)\, dt$.

En analyse complexe, lorsque $g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ est un chemin dans Ω, la forme de l'intégrale (2.3) donne la définition même de

$$\int_\gamma g(z)\, dz := \int_0^1 g(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

2.2.3 Théorèmes usuels de convergence

Théorème 2.11. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $(f_k)_{k\geq 1} \subset \mathscr{C}^1(\Omega)$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque telle que $f_k(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \Omega$ lorsque $k \to \infty$. Si pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ la suite des dérivées partielles $(\partial_j f_k)_k$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction $g_j : \Omega \to \mathbb{R}$ lorsque $k \to \infty$, alors $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ et on a $\partial_j f(x) = g_j(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. En d'autres termes, on a

$$\partial_j f(x) = \partial_j(\lim_{k\to\infty} f_k)(x) = \lim_{k\to\infty} (\partial_j f_k)(x).$$

De plus, la convergence $(f_k) \to f$ est uniforme sur les compacts de Ω.

Corollaire 2.12. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $(f_k)_{k\geq 1} \subset \mathscr{C}^p(\Omega)$ avec $p \geq 2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Supposons que

- $f_k(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \Omega$ lorsque $k \to \infty$;
- $\partial^\alpha f_k(x) \to g_\alpha(x)$ pour tout $x \in \Omega$ lorsque $k \to \infty$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $1 \leq |\alpha| \leq p - 1$ et une certaine fonction $g_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$;
- $\partial^\alpha f_k \to g_\alpha$ uniformément sur les compacts de Ω lorsque $k \to \infty$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = p$ et une certaine fonction $g_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$.

Alors $f \in \mathscr{C}^p(\Omega)$ et on a $\partial^\alpha f(x) = g_\alpha(x)$ tout $x \in \Omega$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $1 \leq |\alpha| \leq p$. De plus, la convergence $(\partial^\alpha f_k) \to \partial^\alpha f$ est uniforme sur les compacts de Ω pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq p$.

Proposition 2.13 (Théorème de Dirichlet global)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(]0,2\pi[)$ une fonction 2π-périodique. La suite des sommes partielles de Fourier à l'ordre $n \in \mathbb{N}$

$$S_n(f)(x) := \sum_{|k|\leq n} \langle f, e_k\rangle \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \text{où } \langle f, e_k\rangle := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt$$

converge vers f uniformément sur $[0,2\pi]$ lorsque $n \to \infty$.

2.3 Analyse complexe

2.3.1 Fonctions holomorphes

Définition 2.14. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in \Omega$ si la limite

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe dans $\mathbb{C}$. Lorsqu'elle existe, cette limite est notée $f'(z_0)$. L'application

$$df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \omega \mapsto df(z_0)\omega := f'(z_0)\omega$$

est appelée la différentielle de f en z_0.

Ecrivons $z_0 = x_0 + iy_0$ et $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et des fonctions $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Alors f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si u et v sont différentiables en (x_0, y_0) et satisfont les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Dans ce cas, on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

L'apparition des relations de Cauchy-Riemann s'explique très naturellement de la façon suivante. La différentielle $df(z_0)$ de f en z_0 peut être vue comme l'application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

est la matricienne jacobienne en (x_0,y_0) de l'application $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ représentant f. Toutefois, la différentielle $df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \omega \to f'(z_0)\omega$ n'est pas qu'une application $\mathbb{R}$-linéaire : par définition, elle est également $\mathbb{C}$-linéaire ! En particulier $df(z_0)1 = f'(z_0) =: a + ib \equiv (a,b)$ et $df(z_0)i = f'(z_0)i = -b + ia \equiv (-b,a)$. Comme 1 est représenté par $(1,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et i par $(0,1)$, la matrice J doit donc satisfaire

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

La forme de la matrice J livre les relations de Cauchy-Riemann.

D'un point de vue structurel, l'identification usuelle entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ comme espaces vectoriels réels n'est qu'un isomorphisme de groupes additifs mais, a priori, pas d'anneaux car on ne considère pas de structure multiplicative fondamentale sur $\mathbb{R}^2$. On plonge alors $\mathbb{C}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2\times 2}$ des matrices 2×2 à coefficients réels muni, lui, naturellement d'une structure multiplicative que l'on fera correspondre au produit dans $\mathbb{C}$. Le plongement de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^{2\times 2}$ doit correspondre à un sous-espace de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ de dimension 2, préservant à la fois la structure additive et multiplicative de $\mathbb{C}$. On prend comme tel sous-espace

$$V := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Il est facile de voir que

$$\varphi : \mathbb{C} \to V,\ \alpha + i\beta \mapsto \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

est un isomorphisme d'anneaux, et pas simplement de groupes additifs, avec

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(iy) = \begin{bmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{bmatrix},$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. On vérifie aisément que

$$\varphi(i)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\varphi(1).$$

Définition 2.15. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction. La fonction f est dite *holomorphe* sur Ω lorsque qu'elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω. L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω est noté $H(\Omega)$.

Les séries de puissances sont holomorphes sur leur disque ouvert de convergence et on a, pour toute fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ définie pour tout $z \in B(z_0, R)$ où R est le rayon de convergence,

$$\forall z \in B(z_0, R), \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Le rayon de convergence de cette dernière série est également R. Par réccurence, on en déduit que les fonctions développables en série de puissances sont $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ au sens complexe avec

$$\forall z \in B(z_0, R), \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!} (z - z_0)^{n-k}.$$

2.3.2 Formule de Cauchy et développement en série de puissances

Définition 2.16. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin tracé dans Ω. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur l'image de γ. On définit

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème fondamental et de la dérivation en chaîne.

Proposition 2.17. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$. Si f admet une primitive $F \in H(\Omega)$, i.e. $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$, alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour tout chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ **<u>fermé</u>** (i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$) tracé dans Ω.

Preuve de la Proposition 2.17. En effet, on a

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

■

Exercice 2.18. Lorsque $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, le mononôme $z \mapsto z^n$ est holomorphe, sur $\mathbb{C}$ lorsque $n \geq 0$ et sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ lorsque $n \leq -2$, et admet pour primitive holomorphe le monôme $z \mapsto z^{n+1}/(n+1)$. Il suit que

$$\int_\gamma z^n\,dz = 0$$

pour tout chemin fermé γ tracé dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ lorsque $n \leq -2$).

De cela on peut déduire, par une approximation de Taylor à l'ordre 1 (qui est un polynôme !) et un partionnement adéquat en triangles, qu'une fonction définie sur un ouvert Ω, holomorphe sur Ω à l'exception éventuellement d'un point et continue sur Ω, est d'intégrale nulle le long du bord de tout triangle dont la surface est contenue dans Ω. Ceci permet de montrer la formule de Cauchy suivante.

Théorème 2.19 (Théorème de Cauchy)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe et $p \in \Omega$. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{p\})$. Alors f admet une primitive $F \in H(\Omega)$. En particulier,

$$\int_\gamma f(\omega)\,d\omega = 0$$

pour tout chemin fermé γ tracé dans Ω. De plus, F s'écrit

$$F(z) = \int_{[a\to z]} f(\omega)\,d\omega, \quad \forall z \in \Omega$$

où $a \in \Omega$ est un point quelconque et $[a \to z]$ est le chemin $\gamma(t) := a + t(z-a)$, $t \in [0,1]$, paramétrisant le segment joignant a et z (en tenant compte de l'orientation !).

Preuve du Théorème 2.19. En effet, fixons $z_0 \in \Omega$. Comme l'intégrale de f s'annule le long du bord du triangle dont les sommets sont a, z_0 et z, on a

$$F(z) = \int_{[a\to z]} f(\omega)\,d\omega = \int_{[a\to z_0]} f(\omega)\,d\omega + \int_{[z_0\to z]} f(\omega)\,d\omega = F(z_0) + \int_{[z_0\to z]} f(\omega)\,d\omega.$$

Il suit que

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0\to z]} f(\omega)\,d\omega.$$

La fin de l'argument suit les mêmes lignes que la preuve théorème fondamental dans $\mathbb{R}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en z_0, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(\omega) - f(z_0)| < \varepsilon$ dès que $|\omega - z_0| < \delta$.

Ainsi, pour tout $z \in B(z_0, \delta)$, on a

$$\begin{aligned}
\Big| f(z_0) - \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0 \to z]} f(\omega)\, d\omega \Big| &= \frac{1}{|z - z_0|} \Big| \int_{[z_0 \to z]} (f(\omega) - f(z_0))\, d\omega \Big| \\
&\le \frac{1}{|z - z_0|} \int_{[z_0 \to z]} |f(\omega) - f(z_0)|\, |d\omega| \\
&\le \frac{\varepsilon}{|z - z_0|} \int_{[z_0 \to z]} |d\omega| \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Il suit que $\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} \to f(z_0)$ lorsque $z \to z_0$. ■

Ceci permet de prouver la formule de Cauchy suivante.

Théorème 2.20 (Formule de Cauchy)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe et $f \in H(\Omega)$. Notons $\gamma^\star := \mathrm{Im}(\gamma)$ l'image de tout chemin γ. Pour tout chemin fermé γ tracé dans Ω et pour tout $z \in \Omega \setminus \gamma^\star$, on a

$$f(z) \times \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}\, d\omega,$$

où

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\omega - z}\, d\omega$$

est l'indice de γ par rapport à z et compte le nombre de tours que parcourt γ autour de z.

Preuve du Théorème 2.19. Il suffit d'observer que, pour tout $z \in \Omega \setminus \gamma^*$, la fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$

$$g(\omega) := \begin{cases} \frac{f(\omega)-f(z)}{\omega - z} & \text{si } \omega \neq z \\ f'(z) & \text{si } \omega = z \end{cases}$$

est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$. Comme $z \in \Omega \setminus \gamma^*$, alors

$$\forall \omega \in \gamma^*, \quad g(\omega) = \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z}.$$

Le théorème de Cauchy sur un ouvert convexe appliqué à g conclut. ■

Remarque 2.21. Le théorème de Cauchy et la formule de Cauchy restent vrai lorsque $f \in H(\Omega)$ et Ω est, plus généralement, un ouvert simplement connexe, c'est-à-dire dans lequel tout chemin est homotope à un point, i.e. ne contient aucun trou.

Corollaire 2.22 (Formule de la moyenne)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $f \in H(\Omega)$. Pour tout $a \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\overline{B(a, r)} \subset \Omega$, on a

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

Preuve du Corollaire 2.22. Considérons $\gamma(t) = a + re^{it}$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Comme $\overline{B(a, r)} \subset \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, r + \varepsilon) \subset \Omega$. Comme f est holomorphe sur Ω, elle est également holomorphe sur l'ouvert convexe $B(a, r + \varepsilon)$. Comme $\gamma^* \subset B(a, r + \varepsilon)$ et que $a \in$

$B(a, r+\varepsilon) \setminus \gamma^\star$, on a par la formule de Cauchy

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - a}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - a} \times \gamma'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{re^{it}} \times ire^{it}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.23 (Homotopie)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in H(\Omega)$. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins fermés tracés dans Ω. Si γ_1 et γ_2 sont homotopes dans Ω, alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

La formule de Cauchy, couplée à un lemme technique, permet de démontrer le résultat fondamental de l'analyse complexe : les fonctions holomorphes sont développables en série de puissances ! C'est un phénomène tout à fait remarquable, inexistant pour la différentiabilité dans $\mathbb{R}^n$, et tout à fait spécifique à la $\mathbb{C}$-dérivabilité. Ce résultat est une manifestation de la rigidité de la notion d'holomorphie, bien plus contraignante que la différentiabilité usuelle.

Théorème 2.24 (Développement en série de puissances)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in H(\Omega)$. Alors f est développable en série de puissances dans Ω au sens suivant. Pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $(c_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ telle que le rayon de convergence de la série de puissances de terme général $(z \mapsto c_n(z_0)z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non-nul, au moins égal à la distance $R := d(z_0, \partial\Omega)$ et

$$\forall z \in B(z_0, R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z - z_0)^n.$$

En particulier, $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ au sens complexe et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

2.3.3 Conséquences du théorème de développement en série de puissances

Théorème 2.25 (Morera)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$. Supposons que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$$

pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$. Alors $f \in H(\Omega)$.

La preuve du théorème de Morera est la même que celle du théorème de Cauchy.

Théorème 2.26 (Principe des zéros isolés)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f \in H(\Omega)$ et

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\},$$

l'ensemble des zéros de f dans Ω. Si $Z(f) \neq \Omega$, alors

1. Aucune suite injective dans $Z(f)$ ne converge dans Ω, auquel cas on dit que $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω. Cela revient à dire que pour tout compact K inclus dans Ω, l'ensemble $Z(f) \cap K$ est fini. Les zéros de f sont donc isolés.
2. $Z(f)$ est dénombrable.
3. Quel que soit $z_0 \in Z(f)$, il existe un unique $m \in \mathbb{N}^*$ et une unique fonction $g \in H(\Omega)$ tels que $z_0 \notin Z(g)$ et
$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) = (z - z_0)^m g(z).$$
L'entier $m \geq 1$ est appelé *l'ordre de* z_0 comme zéro de f.

Ce résultat s'applique en fait à tout ensemble de niveau $\mathcal{C}_\alpha = \{z \in \Omega : f(z) = \alpha\}$, où $\alpha \in \mathbb{C}$, en appliquant le principe des zéros isolés à $z \mapsto f(z) - \alpha$.

Remarque 2.27. Une suite injective de $Z(f)$ pourrait très bien converger dans $\mathbb{C} \setminus \Omega$! Voir le cours de Calcul Différentiel et Intégral 2 pour une discussion plus fine à ce sujet.

Théorème 2.28 (Classification des singularités isolées)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $a \in \Omega$. Soit f une fonction définie sur $\Omega \setminus \{a\}$ et holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. On est dans exactement un des trois cas suivants

1. La fonction f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω. Ceci se produit lorsque $|f|$ admet une limite finie en a ou, de façon équivalente (étonnament !), lorsque f est bornée au voisinage de a, i.e. il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$ et $f(B(a, r) \setminus \{a\})$ est borné. On dit que f admet une singularité effaçable en a.
2. Il existe $m \in \mathbb{N}^\star$ et $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$, avec $c_m \neq 0$, tels que la fonction
$$g(z) := f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}, \quad z \in \Omega \setminus \{a\},$$
admet une singularité effaçable en a (informellement, g est holomorphe sur Ω). Ceci se produit lorsque $|f|$ tend vers $+\infty$ en a. On dit que f a une singularité polaire, ou un pôle, en a. L'entier m et les coefficients $c_1, \dots, c_m$ sont uniques. On appelle la fonction
$$P_a(z) := \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$
la partie polaire de f en a. On appelle m l'ordre du pôle de f en a. On a
$$c_m = \lim_{z \to a} \Big((z-a)^m f(z) \Big)$$
et
$$\forall \ell \in \{1, \dots, m-1\}, \quad c_\ell = \lim_{z \to a} \left\{ (z-a)^\ell \Big(f(z) - \sum_{k=\ell+1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k} \Big) \right\}.$$
3. Pour tout $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$, on a que $f(B(a, r) \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$, i.e. pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, il existe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega \setminus \{a\}$ telle que $z_n \to a$ et $f(z_n) \to \omega$. Ceci se produit lorsque $|f|$ n'a pas de limite (finie ou infinie) en a. On dit que f admet une singularité essentielle en a.

Remarquez la rigidité des fonctions holomorphes au voisinage d'une singularité isolée. S'il existe $r > 0$ tel que $f(B(a, r) \setminus \{0\})$ est borné, alors f admet automatiquement une limite en a, phénomène inexistant dans $\mathbb{R}^n$ en génral. Si ce n'est pas le cas, i.e. si $f(B(a, r) \setminus \{a\})$ est non-borné pour tout $r > 0$, alors soit $|f|$ admet une limite infinie, soit $f(B(a, r))$ est dense dans $\mathbb{C}$ pour tout $r > 0$!

Dans $\mathbb{R}$, on peut tout à fait imaginer une fonction $h \in \mathscr{C}^\infty(]0,\infty[)$ qui, au voisinage de 0, oscille de plus en plus fort entre une valeur $\alpha > 0$ fixée et $+\infty$: d'une part, on n'a pas $|h| \to +\infty$ à cause de l'oscillation et, d'autre part, $h(]0,\varepsilon[) = [a,+\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$ suffisament petit, qui n'est asbolument pas dense dans $\mathbb{R}$ ni même dans $]0,\infty[$.

En réalité, lorsque $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ admet une singularité essentielle en a, le Grand Théorème de Picard affirme qu'il existe $p \in \mathbb{C}$ tel que, dans tout voisinage de a, la fonction f prend une infinité de fois toute valeur de $\mathbb{C} \setminus \{p\}$!

Théorème 2.29 (Liouville)**.** Soit $f \in H(\mathbb{C})$. Alors f est bornée sur $\mathbb{C}$ si et seulement si f est constante.

Exercice 2.30. Soit $f \in H(\mathbb{C})$ une fonction non-constante. Alors l'image de f est dense dans $\mathbb{C}$.

INDICATION : Si l'image de f n'est pas dense dans $\mathbb{C}$, il existe $\omega \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $B(\omega, r)$ n'est pas inclus dans l'image de f. Construire une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$ pour en déduire une contradiction.

Exercice 2.31. Soit $f \in H(\mathbb{C})$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$, $R > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\forall |z| > R, \quad |f(z)| \leq C|z|^n.$$

Alors f est un polynôme de degré au plus n.

Théorème 2.32 (Principe du maximum)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soient $a \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\overline{B(a,r)} \subset \Omega$. Pour tout $f \in H(\Omega)$, on a

$$|f(a)| \leq \max_{\theta \in [0,2\pi]} |f(a + re^{i\theta})|.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si f est constante sur Ω. En particulier, si $f \in H(\Omega)$ est non-constante, alors son module n'admet aucun maximum local sur Ω.

2.3.4 Théorème des résidus

Lorsqu'une fonction est holomorphe sur un ouvert Ω simplement connexe, le théorème de Cauchy permet d'évaluer des intégrales le long d'un chemin en le fermant s'il ne l'est pas déjà et en utilisant le fait que l'intégrale le long du nouveau chemin, désormais fermé, est nulle.

Le théorème des résidus fournit un moyen de calculer de telles intégrales lorsque la fonction n'est pas holomorphe sur Ω tout entier à cause de la présence de pôles.

Définition 2.33 (Fonctions méromorphes)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit d'une fonction f qu'elle est méromorphe sur Ω s'il existe une partie $A \subset \Omega$ telle que

1. A n'a pas de point d'accumulation dans Ω, i.e. aucune suite de points de A ne converge dans Ω ;
2. la fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus A$;
3. pour tout $a \in A$, la fonction f admet un pôle (isolé) en a.

Remarque 2.34. Remarquons que, par définition, étant une singularité isolée, tout pôle est isolé. Il est cependant tout à fait possible que, pour un certain ensemble dénombrable E, une fonction $f \in H(\Omega \setminus E)$ soit telle que $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$ pour tout $a \in E$ mais que E admette des points d'accumulation. Dans ce cas, tous les points non-isolés de E ne sont pas appelés des pôles, et f n'est pas méromorphe.

Remarque 2.35. Les pôles d'une fonction méromorphe étant, par définition, isolés et les zéros d'une fonction holomorphe étant également isolés par le principe des zéros isolés, on a que $a \in \Omega$

est un pôle d'une fonction méromorphe f si et seulement si a est un zéro de $1/f$. Les fonctions méromorphes se correspondent donc par inversion : une fonction f définie sur un ouvert Ω est méromorphe sur Ω si et seulement si $1/f$ est méromorphe sur Ω. On peut montrer que l'ensemble des fonctions méromorphes sur un ouvert Ω forme un corps multiplicatif et correspond en fait au corps de fractions de $H(\Omega)$.

Théorème 2.36 (Théorème des résidus)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. Soit f une fonction méromorphe sur Ω et A l'ensemble de ses pôles dans Ω. Soit γ un chemin fermé tracé dans $\Omega \setminus A$. Alors l'ensemble

$$E = \{a \in A : \mathrm{Ind}_\gamma(a) \neq 0\}$$

est fini, i.e. seul un nombre fini de pôles se trouve "à l'intérieur du contour délimité par γ", et on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in E} \mathrm{Res}(f,a)\mathrm{Ind}_\gamma(a),$$

où $\mathrm{Res}(f,a)$ est le résidu de f en a, défini comme le coefficient $c_1(a)$ de la partie polaire de f en a donnée par

$$P_a(z) := \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k(a)}{(z-a)^k},$$

lorsque m est l'ordre du pôle a.

Cette valeur de l'intégrale s'explique très intuitivement. Comme la fonction $z \mapsto f(z) - \sum_{a\in E} P_a(z)$ se prolonge de façon holomorphe sur Ω, son intégrale le long de γ est nulle. Ainsi,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in E}\int_\gamma P_a(z)\,dz.$$

Se rappelant que $z \mapsto \frac{1}{(z-a)^n}$ est holomorphe sur $\Omega \setminus A$ lorsque $n \leq -2$, le théorème de Cauchy livre

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in E}\int_\gamma \frac{c_1(a)}{z-a}\,dz = \sum_{a\in E} c_1(a)\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz = \sum_{a\in E}\mathrm{Res}(f,a)\mathrm{Ind}_\gamma(a).$$

Corollaire 2.37 (Formule de Cauchy pour les dérivées)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $f \in H(\Omega)$. Pour tout $r > 0$ et tout $z \in \Omega$ tel que $\overline{B(z,r)} \subset \Omega$, on a

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{k+1}}\,d\omega,$$

où $\gamma(t) := z + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Preuve du Corollaire 2.37. Comme la fonction

$$\omega \mapsto \frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{k+1}}$$

est méromorphe sur Ω avec un pôle d'ordre $k+1$ en z, on va pouvoir lui appliquer le théorème des résidus. Comme f est holomorphe sur Ω, elle est développable en série de puissances autour de z et on peut calculer explicitement sa partie polaire en z. Soit $R > 0$ tel que

$$\forall \omega \in B(z,R), \quad f(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(\omega-z)^n.$$

On a alors

$$\forall \omega \in B(z,R), \quad g(\omega) := \frac{f(\omega)}{(\omega-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(\omega-z)^{n-(k+1)}.$$

Ainsi, le résidu de g en z, donné par le coefficient du monomôme de degré -1 dans la série précédente, vaut $f^{(k)}(z)/k!$. Puisque γ est tracé dans $\Omega \setminus \{z\}$, que g est méromorphe avec z comme unique pôle et que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$, il suit du théorème des résidus

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{k+1}}\, d\omega = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(\omega)\, d\omega = \mathrm{Res}(g, z)\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{f^{(k)}(z)}{k!}.$$

■

2.4 Théorie de la mesure

2.4.1 Mesures et intégration

Soit X un ensemble. Une collection $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de X est une σ-algèbre si $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire (i.e. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{F}$) et par union dénombrable. Dans un espace topologique $(M, \mathcal{T})$, on appelle *σ-algèbre de Borel*, et on note $\mathcal{B}(M)$, la σ-algèbre engendrée par la topologie de M, i.e. la plus petite σ-algèbre de M qui contient tous les ouverts de $(M, \mathcal{T})$. Les éléments de $\mathcal{B}(M)$ sont les *boréliens* de $(M, \mathcal{T})$.

Une mesure μ sur $\mathcal{F}$ est une application $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ si $(A_n) \subset \mathcal{F}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$.

Théorème 2.38 (Continuité des mesures)**.** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ est croissante ($A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n), alors $\mu(A_n) \nearrow \mu(\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k)$. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et si $\mu(A_1) < \infty$, alors $\mu(A_n) \searrow \mu(\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k)$.

On rappelle qu'un π-système $\mathcal{P}$ est une collection de parties stable par intersection finie, i.e. $A \cap B \in \mathcal{P}$ pour tous $A, B \in \mathcal{P}$.

Théorème 2.39 (Unicité des mesures)**.** Soit $\mathcal{P}$ un π-système et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\sigma(\mathcal{P})$ qui sont σ-finies sur $\mathcal{P}$. Si $\mu_1 = \mu_2$ sur $\mathcal{P}$, alors $\mu_1 = \mu_2$ sur $\sigma(\mathcal{P})$.

Dans $\mathbb{R}^n$, des π-système classiques sont : les compacts, les ouverts, les fermés, les semi-cubes $\prod_{k=1}^n]a_i, b_i]$. Pour montrer que deux mesures (σ-finies sur un π-système $\mathcal{P}$) sont égales, il suffit donc en pratique de vérifier que ces mesures coincident sur $\mathcal{P}$, ce qui est beaucoup plus simple.

La *mesure de Lebesgue* dans $\mathbb{R}^n$, notée λ, est définie, pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, par

$$\lambda(B) = \inf\Big\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{volume}(C_k) : B \subset \cup_{k\in\mathbb{N}} C_k,\ C_k \text{ semi-cube}\Big\}.$$

C'est l'unique mesure définie sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\lambda\Big(\prod_{k=1}^n [a_i, b_i]\Big) = \prod_{k=1}^n (b_i - a_i),$$

pour tout pavé compact $\prod_{k=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.40 (Régularité des mesures)**.** Soit $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$ un espace de mesure. Supposons que μ est finie sur les compacts. Alors pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, on a que

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subset A,\ F \text{ compact}\} = \inf\{\mu(G) : A \subset G,\ G \text{ ouvert}\}.$$

Une fonction $f : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{C}$ est *mesurable* si $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Il est facile de voir que f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$.

Une fonction $s : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{C}$ est *simple* s'il existe $n \geq 1$, des coefficients $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et des ensembles $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ tels que

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Dans ce cas, on définit $\int_X s\, d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$. Si $f : (X, \mathcal{F}) \to [0, \infty]$ est mesurable, on définit

$$\int_X f\, d\mu := \inf \left\{ \int_X s\, d\mu : s \text{ simple }, 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Si f est à valeurs réelles, on définit $\int_X f\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu$ lorsqu'au moins une des deux intégrales est finie. Si f est à valeurs complexes, on définit $\int_X f\, d\mu = \int_X \mathrm{Re}(f)\, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}(f)\, d\mu$ lorsque ces deux dernières intégrales sont définies.

Si μ est une mesure discrète, $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \delta_{x_n}$ où $(p_n) \subset (0, \infty)$, $(x_n) \subset X$, et si $f \geq 0$, alors

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n f(x_n).$$

Proposition 2.41 (Calcul d'intégrales de Lebesgue)**.** Soit $K = \prod_{k=1}^{n} [a_i, b_i]$, compact dans $\mathbb{R}^n$ et soit $u : K \to \mathbb{C}$ une fonction bornée. Alors u est Riemann-intégrable sur K si et seulement si l'ensemble $\{x \in K : u \text{ n'est pas continue en } x\}$ est de mesure de Lebesgue nulle. Dans ce cas, u est mesurable et on a

$$\int_K u\, d\lambda = \int_K u(x)\, dx.$$

Ce résultat s'applique en particulier pour le calcul d'intégrales de fonctions continues (ou continues par morceaux) ou de fonctions égales presque partout à une fonction continue.

Soient $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ deux espaces de mesures σ-finis. On définit

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 := \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{F}_i\}).$$

Il existe une unique mesure sur $(X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$, notée $\mu_1 \otimes \mu_2$, telle que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

pour tous $A_i \in \mathcal{F}_i$ tels que $\mu_i(A_i) < \infty$.

Théorème 2.42 (Fubini)**.** Soit $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable.

1. Si f est réelle et à valeurs positives, alors

$$\begin{aligned}
\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2)
\end{aligned}$$

2. Si $\int_{X_1 \times X_2} |f|\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty$, alors les équations précédentes sont vérifiées.

En pratique, comme $|f| \geq 0$, on peut vérifier que $\int_{X_1 \times X_2} |f|\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty$ en calculant les intégrales itérées, selon μ_1 puis μ_2 ou inversément, en accord avec la première partie du théorème de Fubini.

2.4.2 Espaces L^p

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de mesure. Etant donné $p \in [1, \infty[$, on appelle $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ mesurables telles que

$$\|f\|_{L^p(X,\mathcal{F},\mu)} := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty.$$

Il s'agit d'un espace vectoriel, muni de la pseudo-norme $\| \cdot \|_{L^p(X,\mathcal{F},\mu)}$. En effet, cette application est positive, homogène et vérifie l'inégalité triangulaire (il s'agit de l'inégalité de Minkowski), mais $\int_X |f|^p \, d\mu = 0$ n'implique pas nécessairement que $f = 0$ en tant que fonction. Cependant, $\| \cdot \|_{L^p(X,\mathcal{F},\mu)}$ est bien une norme sur l'espace vectoriel

$$L^p(X, \mathcal{F}, \mu) := \mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)/ \sim,$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence définie, pour tous $f, g \in \mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ par : $f \sim g$ si et seulement si $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. En pratique, on voit $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ comme les fonctions μ-intégrables à la puissance p, et $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ comme ces mêmes fonctions identifiées lorsqu'elles sont égales μ-presque partout.

On définit également l'espace $\mathscr{L}^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ des fonctions *essentiellement bornées* comme l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mathcal{F},\mu)} := \inf_{A \in \mathcal{N}} \sup_{x \in X \setminus A} |f(x)| < \infty,$$

où $\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\}$. Similairement, on définit $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu) = \mathscr{L}^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)/ \sim$. On dit d'une fonction $f \in L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ qu'elle est *essentiellement bornée* car il existe un ensemble μ-négligeable $E \in \mathcal{F}$ tel que f est bornée sur $X \setminus E$.

On formule dans le théorème suivant un des premiers intérêts à avoir introduit ces espaces de fonctions.

Théorème 2.43. Pour tout $p \in [1, \infty]$, l'espace $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace de Banach. De plus, les fonctions simples de l'espace $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ sont denses dans $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Il est important de rappeler que toute fonction simple définie sur $(X, \mathcal{F}, \mu)$ n'est pas nécessairement dans $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ lorsque $1 \leq p < \infty$. Pour qu'elle le soit, il est nécessaire et il suffit que chaque élément de $\mathcal{F}$ apparaissant dans la fonction simple soit de μ-mesure finie.

La proposition suivante, bien qu'elle puisse paraitre d'un intérêt modéré, joue en réalité un rôle important dans l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs, abordées sommairement dans ces séances d'exercices.

Proposition 2.44. Soit $p \in [1, \infty[$. S'il existe une collection dénombrable $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ telle que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$ et si μ est σ-finie sur $\mathcal{A}$, alors $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ est séparable.

La preuve est assez simple. On approxime une fonction de $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ par une fonction simple s de $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$. Les coefficients apparaissant dans s peuvent être approximés par des complexes à composantes rationnelles. Les ensembles de $\mathcal{F}$ apparaissant dans s pourront être approximés, en vertu du théorème d'approximation, par des combinaisons d'éléments de $\mathcal{A}$.

De la Proposition 2.44, on déduit facilement le corollaire suivant.

Corollaire 2.45. Supposons que X est un espace métrique séparable et prenons $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$ sa σ-algèbre de Borel. Si μ est localement finie, au sens où pour tout $x \in X$ il existe $r_x > 0$ tel que $\mu(B(x, r_x)) < \infty$, alors $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ est séparable.

Preuve du Corollaire 2.45. Comme X est séparable, il existe $M \subset X$ dénombrable et dense. Montrons que $\mathcal{F}$ est engendrée par $\mathcal{A}$, l'ensemble des boules $B(x,r)$ où $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in M$. Soit $U \subset X$ un ouvert non-vide. On va montrer que U s'écrit comme union dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$. Pour tout $x \in M \cap U$, posons $R_x = \{r \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q} : B(x,r) \subset U\}$. Il est clair que R_x est dénombrable pour tout $x \in M \cap U$ et que

$$\bigcup_{x \in M \cap U} \bigcup_{r \in R_x} B(x,r) \subset U.$$

Pour montrer l'inclusion inverse, considérons $z \in U$. On veut trouver $x \in M \cap U$ et $r > 0$ rationnel tels que $z \in B(x,r)$ et $r \in R_x$, i.e. $B(x,r) \subset U$. Il existe $\rho > 0$ tel que $B(z,\rho) \subset U$. Quitte à prendre un ρ plus petit, on peut supposer que ρ est rationnel. Par densité de M, il existe $x \in M$ tel que $d(z,x) < \rho/2$. En particulier, ceci implique que $x \in B(z,\rho/2) \subset B(z,\rho) \subset U$ et donc que $x \in U \cap M$. Comme $d(x,z) < \rho/2$, on a également $z \in B(x,\rho/2)$. Montrons alors que $B(x,\rho/2) \subset U$ et la conclusion suivra en prenant $r = \rho/2$. Soit $y \in B(x,\rho/2)$, i.e. $d(y,x) < \rho/2$. On a donc que $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < \rho$. Par conséquent, on a $y \in B(z,\rho) \subset U$. On en déduit que $B(x,\rho/2) \subset U$. Finalement, $z \in B(x,\rho/2)$ avec $x \in M \cap U$ et $B(x,\rho/2) \subset U$, i.e. $\rho/2 \in R_x$. On en conclut que

$$U = \bigcup_{x \in M \cap U} \bigcup_{r \in R_x} B(x,r) \in \sigma(\mathcal{A}).$$

Ceci implique que $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{A})$. Puisqu'on a trivialement $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, on conclut que $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$. De plus, $\mathcal{A}$ est manifestement dénombrable.

Il reste à voir que μ est σ-finie sur $\mathcal{A}$. Ecrivons $X = \cup_{x \in X} B(x,r_x)$, où r_x est donné dans l'énoncé. Puisque X est séparable, alors X est Lindelöf en vertu du Théorème 2.3. Il existe donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tel que $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, r_{x_n})$. Par ailleurs, on a vu précédemment que, pour tout n, la boule ouverte $B(x_n, r_{x_n})$ peut s'écrire comme une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$; ces éléments sont de mesure finie car ils sont inclus dans $B(x_n, r_{x_n})$ et puisqu'on a par hypothèse que $\mu(B(x_n, r_{x_n})) < \infty$ pour tout n. Ainsi, μ est σ-finie sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{A}$ dénombrable. On conclut finalement par la Proposition 2.44 que $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ est séparable. ■

En particulier, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et μ est une mesure localement finie (par exemple toute mesure finie sur les compacts, toute mesure de probabilité, toute mesure σ-finie), alors $L^p(\Omega, \mu)$ est séprable pour tout $1 \leq p < \infty$.

2.4.3 Théorèmes utiles

L'intégrale de Lebesgue possède des propriétés très désirables, notament le célèbre *Théorème de la convergence dominée de Lebesgue.*

Théorème 2.46 (Convergence dominée)**.** Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de mesure et $1 \leq p < \infty$. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{F})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $f_n(x) \to f(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$. S'il existe $g \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ telle que $|f_n| \leq |g|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ et $f_n \to f$ dans $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, i.e.

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f|^p \, d\mu = 0.$$

Le théorème suivant est utile en pratique pour déterminer qu'une fonction est intégrable lorsque la convergence dominée ne peut pas s'appliquer.

Théorème 2.47 (Lemme de Fatou)**.** Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de mesure. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{F})$ à valeurs réelles. S'il existe $g : (X, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ telle que $\int_X g^- \, d\mu < \infty$

et $f_n \geq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

En particulier, le Lemme de Fatou s'applique toujours si la suite de fonctions est positive. Dans ce cas, pour tout $1 \leq p < \infty$, on a alors

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} |f_n|^p \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n|^p \, d\mu.$$

Si $f_n \to f$ μ-presque partout et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, alors $f \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Théorème 2.48 (Inégalité de Jensen). Soient $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, et $\phi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit (X, μ) un espace de probabilité et soit $f : X \to I \in L^1(X, \mu)$. Alors,

$$\varphi\Big(\int_X f \, d\mu\Big) \leq \int_X \varphi \circ f \, d\mu.$$

Cette inégalité se révèle utile en pratique pour majorer des intégrales calculées sur des espaces de mesure finie. Par exemple, en vertu de l'inégalité de Jensen on a

$$\Big(\int_a^b |f(t)| \, dt\Big)^p \leq (b-a)^{p-1} \int_a^b |f(t)|^p \, dt$$

Théorème 2.49 (Inégalité de Hölder). Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de mesure. Soient $p \in [1, \infty]$ et $p' := p/(p-1) \in [1, \infty]$ l'*exposant conjugué*. Si $f, g : X \to \mathbb{C}$ sont des fonctions mesurables telles que $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^{p'}(\mu)$, alors $fg \in L^1(\mu)$ et on a

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \Big(\int_X |f|^p \, d\mu\Big)^{1/p} \Big(\int_X |g|^{p'} \, d\mu\Big)^{1/p'}.$$

L'inégalité de Hölder se réecrit encore

$$\|fg\|_{L^1(X,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(X,\mu)} \|g\|_{L^{p'}(X,\mu)}.$$

Cette inégalité est absolument fondamentale en analyse. Elle a des conséquences majeures, notamment concernant la dualité des espaces L^p et la théorie de la convergence faible dans ces espaces, dont on ne parlera que brièvement dans le cas de L^2. Cette inégalité sera utilisée très souvent au fil des séances d'exercices.

Théorème 2.50 (Changement de variable). Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1(U)$ et injective sur U. Pour tout ensemble Lebesgue-mesurable $A \subset U$ et toute fonction Borel-mesurable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\int_{\varphi(A)} f(x) \, dx = \int_A f(\varphi(y)) |\det(J_\varphi(y))| \, dy$$

2.4.4 Régularisation

La philosophie de la régularisation est au coeur même de l'analyse. Les objets usuels de l'analyse sont trop compliqués à manipuler (fonctions intégrables, L^p, mesurables, etc.). La régularisation permet d'approcher ces fonctions, fort abstraites, par des fonctions que l'on comprend beaucoup mieux et que l'on sait mieux manipuler : des fonctions lisses.

Pour cette raison, la régularisation et les résultats de densité en général seront un des objets centraux de ce cours et on ne sera à même de résoudre nombre d'exercices qu'à grand renfort de densité.

Pour tout $r > 0$, notons $B(0,r)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ de rayon r centrée en l'origine. Soit $\rho \in \mathscr{C}_c^\infty(B(0,1))$, $\rho \geq 0$ et telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\rho_\varepsilon \in \mathscr{C}_c^\infty(B(0,\varepsilon))$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1$.

Si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, on définit

$$(\rho_\varepsilon * u)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)u(x-y)\, dy = (u * \rho_\varepsilon)(x).$$

On se convainc aisément que $\mathrm{supp}(\rho_\varepsilon * u) \subset \mathrm{supp}(u) + \overline{B(0,\varepsilon)}$.

Théorème 2.51. Les fonctions $\rho_\varepsilon * u$ vérifient les propriétés suivantes :

1. si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, alors $\rho_\varepsilon * u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et
$$\partial_i(\rho_\varepsilon * u)(x) = (\partial_i \rho_\varepsilon) * u(x)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $1 \leq i \leq n$.
2. si $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, alors $\|\rho_\varepsilon * u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ et
$$\|\rho_\varepsilon * u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{quand } \varepsilon \to 0.$$
3. si $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^n)$, alors $\rho_\varepsilon * u \to u$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.
4. si $u \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$, alors
$$\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u)(x) = (\partial^\alpha \rho_\varepsilon) * u(x) = \rho_\varepsilon * (\partial^\alpha u)(x)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$.

On déduit aisément du point 2 que $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lorsque $u \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$, on a par le point 4 que $\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u) = \rho_\varepsilon * (\partial^\alpha u)$ avec $\partial^\alpha u$ qui est continue. En particulier, $\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u) \to \partial^\alpha u$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^n$, et ce pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$.

2.4.5 Quelques exercices

Exercice 2.52 (Intégration par parties)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $\varphi \in \mathscr{C}_c^1(\Omega)$ et $K := \mathrm{supp}(\varphi)$ son support.

1. Soient $\delta > 0$ tel que $\delta < d(K, \partial\Omega)$ et $s \in (0,\delta)$. Justifiez que
$$\int_\Omega \frac{\varphi(x+se_j) - \varphi(x)}{s}\, dx = \int_{K^\delta} \frac{\varphi(x+se_j) - \varphi(x)}{s}\, dx,$$
pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, où e_j est le j-ème vecteur de la base canonique.
2. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|h\| < d(K,\partial\Omega)$, montrez qu'on a
$$\int_\Omega \varphi(x+h)\, dx = \int_\Omega \varphi(x)\, dx.$$

et déduisez-en que

$$\int_\Omega \partial_j \varphi(x)\, dx = 0, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

3. Pour tout $u \in \mathscr{C}^1_c(\Omega)$ et tout $v \in \mathscr{C}^1(\Omega)$, montrez que

$$\int_\Omega u(x)\partial_j v(x)\, dx = -\int_\Omega (\partial_j u)(x) v(x)\, dx, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Exercice 2.53 (Ordre des quantificateurs)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de mesure. Soient u et $(u_k)_{k\geq 1}$ des fonctions mesurables de $\mathbb{R}^n \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Expliquez en quoi les affirmations suivantes ne sont pas équivalentes :
   (a) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\lim_{k\to\infty} u_k(x, \omega) = u(x, \omega)$ pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$;
   (b) pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, on a $\lim_{k\to\infty} u_k(x, \omega) = u(x, \omega)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrez que (b) implique toujours (a).
3. Pour tout $\omega \in \Omega$ supposons de plus que
   (a) pour tout k, la fonction $x \mapsto u_k(x, \omega)$ est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$;
   (b) la fonction $x \mapsto u(x, \omega)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$;
   (c) la suite de fonctions $(\nabla u_k(\cdot, \omega))_{k\geq 1}$ est localement uniformément bornée au sens suivant : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $r > 0$ tel que

   $$\sup_{k\geq 1} \|\nabla u_k(\cdot, \omega)\|_{L^\infty(B(x,r))} < \infty.$$

   Montrez alors que (a) implique (b) au point 1.

   Indication : commencez par justifier qu'il existe un ensemble dénombrable et dense $Q \subset \mathbb{R}^n$ et un ensemble $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ de mesure pleine (i.e. $\mu(\Omega \setminus \tilde{\Omega}) = 0$) tels que

   $$\lim_{k\to\infty} u_k(q, \omega) = u(q, \omega)$$

   pour tout $q \in \mathbb{Q}$ et tout $\omega \in \tilde{\Omega}$. Ensuite, pour $\omega \in \tilde{\Omega}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ désormais quelconque, approximez $|u_k(x, \omega) - u(x, \omega)|$.

Exercice 2.54. Montrez que les deux propositions suivantes sont, en général, disjointes : on peut avoir l'une sans l'autre et inversément.

1. La fonction f est continue presque partout.
2. La fonction f est égale presque partout à une fonction continue.

Exercice 2.55 (Dérivation sous l'intégrale)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction. Supposons que

1. pour tout $x \in \Omega$, la fonction $y \mapsto f(x, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$,
2. pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est de classe $\mathscr{C}^1(\Omega)$,
3. pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe $U_{x_0} \subset \Omega$ un voisinage ouvert de x_0 et $g_{x_0} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty] \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tels que pour tout $x \in U_{x_0}$, presque tout $y \in \mathbb{R}^n$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\right| \leq g_{x_0}(y).$$

Montrez alors que la fonction

$$\Omega \to \mathbb{C} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\, dy$$

est de classe $\mathscr{C}^1(\Omega)$ et que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dy\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\,dy$$

pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$.

Exercice 2.56. Soit $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espace de mesure tel que $\mu(X) > 0$.

1. Soient $1 \le p \le q \le \infty$. Si $\mu(X) < \infty$, montrez que

$$\frac{\|u\|_{L^p(X,\mu)}}{\mu(X)^{1/p}} \le \frac{\|u\|_{L^q(X,\mu)}}{\mu(X)^{1/q}},$$

   pour tout $u \in L^q(X,\mu)$ et déduisez-en que

$$L^q(X,\mu) \subset L^p(X,\mu).$$

   Indication : utilisez l'inégalité de Hölder.

2. Soient $1 \le p < q < \infty$. Soient $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$u(x) = \frac{1}{x^{1/q}}\mathbb{1}_{(0,1]}(x) \quad \text{ et } \quad v(x) = \frac{1}{x^{1/p}}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x).$$

   Montrez *i)* que $u \in L^p(\mathbb{R})$ mais $u \notin L^q(\mathbb{R})$, et *ii)* que $v \in L^q(\mathbb{R})$ mais $v \notin L^p(\mathbb{R})$. A-t-on $L^p(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ ou $L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$?

3. Soient $1 \le p \le q \le \infty$ et $u : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Soit $\theta \in [0,1]$. Montrez que

$$\|u\|^{\theta p+(1-\theta)q}_{L^{\theta p+(1-\theta)q}(X,\mu)} \le \|u\|^{\theta p}_{L^p(X,\mu)}\|u\|^{(1-\theta)q}_{L^q(X,\mu)}$$

   Déduisez-en que

$$L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu) = \bigcap_{r\in[p,q]} L^r(X,\mu).$$

4. (a) Construisez une fonction continue $f : \mathbb{R} \mapsto [0,\infty)$ telle que $f \in L^1(\mathbb{R})$ mais pour laquelle on n'a pas $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   Indication : considérez des triangles de base $1/k^3$ et de hauteur $2k$, $k \ge 1$.
   (b) Construisez une fonction continue $f : \mathbb{R} \mapsto [0,\infty)$ telle que $f \in \bigcap_{p\in[1,\infty)} L^p(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^\infty(\mathbb{R})$. Qu'en est-il se on remplace $\mathbb{R}$ par un compact ou un ouvert borné de $\mathbb{R}$?
   (c) Construisez une fonction continue $f : \mathbb{R} \mapsto [0,\infty)$ telle que $f \in \bigcap_{p\in[1,\infty]} L^p(\mathbb{R})$ mais pour laquelle on n'a pas $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. Soit $1 \le p < \infty$. Définissons

$$\ell^p(\mathbb{N}) := L^p(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#) = \left\{(x_k)_{k\ge0} : \|(x_k)\|_{\ell^p(\mathbb{N})} := \Big(\sum_{k\ge0}|x_k|^p\Big)^{1/p} < \infty\right\}.$$

   L'espace $\ell^\infty(\mathbb{N}) := L^\infty(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#)$ est la collection des suites bornées, avec $\|(x_k)\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})} = \sup_{k\ge0}|x_k|$.
   (a) Pour tout $r \ge 1$ et tout $x \ge 0$, montrez que $(1+x)^r \ge 1 + x^r$ et déduisez-en que $(a+b)^r \ge a^r + b^r$ pour tous $a, b \ge 0$ et tout $1 \le r < \infty$.
   (b) Soit $(x_k)_{k\ge0}$. Pour tout $n \ge 0$ et tout $1 \le r < \infty$, montrez que

$$\Big(\sum_{k=0}^n |x_k|^r\Big)^{1/r} \le \sum_{k=0}^n |x_k|.$$

(c) Soit $(x_k)_{k\geq 0}$. Pour tout $n \geq 0$ et tous $1 \leq p \leq q < \infty$, montrez que

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^q\Big)^{1/q} \leq \Big(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p} \leq \frac{(n+1)^{1/p}}{(n+1)^{1/q}}\Big(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^q\Big)^{1/q}.$$

Indication : pour prouver la seconde inégalité, utilisez l'inégalité de Hölder sur l'espace de probabilité $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \nu_n)$ où

$$\nu_n(A) := \frac{1}{n+1}\#(A \cap \{0, 1, \ldots, n\}), \quad \forall\, A \subset \mathbb{N}$$

est la mesure de probabilité sur $\{0, \ldots, n\}$.

En particulier, cela prouve qu'à n fixé, les normes p et q sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, et ce pour tous $p, q \in [1, \infty)$. Ce résultat est en fait un cas particulier d'un autre résultat beaucoup plus général : dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

(d) Soit $(x_k)_{k\geq 0}$. Pour tous $1 \leq p \leq q \leq \infty$, montrez que $\|(x_k)\|_{\ell^q(\mathbb{N})} \leq \|(x_k)\|_{\ell^p(\mathbb{N})}$ et déduisez-en que

$$\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$$

Montrez que $\ell^q(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N})$ est faux en général.

Cette inclusion contraste fortement avec le cas des espaces L^p associés à une mesure finie : l'inclusion est inversée !

3 Fonctions tests

3.1 Rappels

On énonce un résultat de densité un peu plus général que les théorèmes classiques liés à la convolution. Sa preuve, fournie en appendice, repose essentiellement, outre la théorie de la mesure, sur la Proposition 3.3 démontrée dans cette séance.

Théorème 3.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures définies sur les boréliens de Ω et finies sur les compacts de Ω. Soient $p_1, p_2 \in [1, \infty)$ et $u \in L^{p_1}(\Omega, \mu_1) \cap L^{p_2}(\Omega, \mu_2)$. Il existe une suite de fonctions $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\Omega)$ telle que

$$\|u - u_k\|_{L^{p_1}(\Omega,\mu_1)} + \|u - u_k\|_{L^{p_2}(\Omega,\mu_2)} \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

De plus, si $u \geq 0$ alors on peut choisir $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sorte que $u_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3.2 Enoncés des exercices

Exercice 3.2 (La classe $\mathscr{D}(\Omega)$)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrez par induction que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$f^{(n)}(x) = P_n\Big(\frac{1}{x}\Big)e^{-\frac{1}{x}},$$

   où P_n est un polynôme. Déduisez-en que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrez que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, à support égal à K :

   $$F_{a,b}(x) := f(x-a)f(b-x), \quad K = [a,b].$$

   $$G(x) := \prod_{k=1}^{n} F_{a_k,b_k}(x_k), \quad K = \prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k].$$

   $$H_{x_0,R}(x) := f(R^2 - \|x - x_0\|^2), \quad K = \overline{B(x_0,R)}.$$
3. Nous allons maintenant nous intéresser à un type particulier de fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support

compact : les fonctions plateaux. Pour $a < b$, définissons

$$I_{a,b}(x) := \frac{\int_{-\infty}^{x} F_{a,b}(s)\,ds}{\int_{-\infty}^{\infty} F_{a,b}(s)\,ds}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Décrivez le comportement de la fonction $I_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$. Justifiez que $I_{a,b} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, définissons la fonction $J_{x_0,a,b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$J_{x_0,a,b}(x) := 1 - I_{a^2,b^2}(\|x - x_0\|^2).$$

Justifiez que $J_{x_0,a,b} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $J_{a,b} = 1$ sur $\overline{B(x_0,a)}$ et $\operatorname{supp}(J_{x_0,a,b}) = \overline{B(x_0,b)}$.

(c) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $K \subset \Omega$ un compact. Justifiez que pour tout $x \in K$, il existe $\rho_x > 0$ tel que $\overline{B(x, 2\rho_x)} \subset \Omega$. Montrez qu'il existe $N \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_N \in K$ tels que

$$\psi(x) := \sum_{j=1}^{N} J_{x_j,\rho_{x_j},2\rho_{x_j}}(x)$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\psi(x) \geq 1$ pour tout $x \in K$. Déduisez-en que $\varphi(x) := I_{0,1}(\psi(x)) \in \mathscr{D}(\Omega)$, $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi = 1$ sur K.

Nous venons de démontrer l'existence de fonctions plateau, formulée dans la proposition suivante.

Proposition 3.3 (Existence des fonctions plateau)**.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $K \subset \Omega$ un compact. Il existe $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tel que $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi = 1$ sur K.

Exercice 3.4 (L'espace $L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mu)$)**.** Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ qui est finie sur les compacts de Ω. On dira d'une fonction Borel-mesurable $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qu'elle est μ-localement intégrable sur Ω, et on écrira $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mu)$, lorsque

$$\int_K |u|\,d\mu < \infty,$$

pour tout compact $K \subset \Omega$. Montrez que $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mu)$ si et seulement si $u\varphi \in L^1(\Omega, \mu)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Exercice 3.5. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ qui est finie sur les compacts de Ω. Soient $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mu)$ des fonctions telles ques

$$\int_\Omega f\varphi\,d\mu = \int_\Omega g\varphi\,d\mu \tag{3.1}$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Montrez que $f = g$ μ-presque partout.

Résolution de l'exercice 3.5.

Soit $K \subset \Omega$ un compact. On a que (K^δ) est une suite d'ouverts décroissants telle que $K^\delta \searrow K$ lorsque $\delta \searrow 0$. Quitte à rescale δ, on peut supposer sans perte de généralité que $K^1 \subset \Omega$. Pour tout $\delta > 0$, soit $\varphi_\delta \in \mathscr{D}(K^\delta)$ une fonction plateau avec $\varphi_\delta = 1$ sur K. Pour tout $\delta > 0$, on a

$$0 = \int_\Omega (f-g)\varphi_\delta\,d\mu = \int_K (f-g)\,d\mu + \int_{K^\delta \setminus K} (f-g)\varphi_\delta\,d\mu.$$

Observons maintenant que

$$\Big|\int_{K^\delta\setminus K}(f-g)\varphi_\delta\,d\mu\Big| \leq \int_{K^\delta\setminus K}|f-g|\,d\mu$$

Comme $K^\delta\setminus K \subset K^1$, $K^\delta\setminus K \searrow \emptyset$ et puisque $f-g$ est intégrable sur K^1, la continuité des mesures par au-dessus implique que $\int_{K^\delta\setminus K}|f-g|\,d\mu \searrow 0$ lorsque $\delta \searrow 0$. On en déduit que

$$\int_K (f-g)\,d\mu = 0$$

pour tout compact $K \subset \Omega$. En appelant ν^+ et ν^- les mesures définies par $A \mapsto \int_A (f-g)^{\pm}\,d\mu$, on voit que ν^+ et ν^- sont σ-finies sur $\mathcal{K}$, la collection des compacts de Ω, car $f-g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega,\mu)$. De plus ν^+ et ν^- coincident sur $\mathcal{K}$, qui est un π-système engendrant les boréliens de Ω. Le théorème d'unicité des mesures garantit alors que ν^+ et ν^- coincident sur les boréliens de Ω, i.e.

$$\int_A (f-g)\,d\mu = 0$$

pour tout borélien $A \subset \Omega$. En particulier, on peut prendre $A = \{f > g\}$ pour conclure que $\mu(\{f > g\}) = 0$. Similairement, on peut conclure que $\mu(\{f < g\}) = 0$. Finalement, on a $\mu(\{f \neq g\}) = 0$. $\square$

Exercice 3.6 (Continuité du groupe des translations)**.** Soit $p \in [1,\infty)$. Etant donné $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n$, on écrira $u(\cdot+h)$ pour désigner la fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto u(x+h)$.

1. Pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$, montrez que $u(\cdot+h) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
2. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$, montrez que

$$\|\varphi(\cdot+h)-\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|h\|\|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

   où

$$\|\nabla\varphi\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla\varphi(x)\|^p\,dx.$$

   Indication : utilisez l'inégalité de Jensen.
3. Pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, prouvez que

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{\substack{h,m\in\mathbb{R}^n\\ \|h-m\|<\delta}}\|u(\cdot+h)-u(\cdot+m)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Exercice 3.7. Soit μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}$ finie sur les compacts. Supposons que

$$\int_{\mathbb{R}}\psi'(x)\,d\mu(x) = 0$$

pour tout $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. On va montrer que, dans ce cas, μ est un multiple de la mesure de Lebesgue.

1. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx = 0$, montrez qu'il existe $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tel que $\varphi = \psi'$ et déduisez-en que

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,d\mu(x) = 0.$$

2. Montrez qu'il existe une suite de fonctions $(\psi_n) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}}\psi_n\,dx = 1$ pour tout $n \geq 1$ et ψ_n converge vers la fonction $x \mapsto \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^1(\mu)$.

3. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, justifiez que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, d\mu(x) = \mu(]0,1[) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx.$$

Indication : au point 1, on a envie de remplacer φ (qui est lisse mais pas d'intégrale nulle) par $\varphi - \overline{\varphi}\, \mathbb{1}_{(0,1)}$ (qui est d'intégrale nulle mais pas lisse), où $\overline{\varphi} := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$. Afin de réaliser cette manipulation proprement, considérez $u_n(x) := \varphi(x) - \overline{\varphi}\, \psi_n(x)$ où (ψ_n) est une suite de fonctions appropriée.

4. A l'aide du théorème d'unicité des mesures (Théorème 2.40), déduisez que μ est un multiple de la mesure de Lebesgue et, de plus, que ce multiple est égal à $\mu([0,1])$.

Exercice 3.8. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in L^1([0,1])$ une fonction 1-périodique. Ecrivons $\bar{u} := \int_0^1 u(x)\, dx$.

1. Pour tous $a, b \in [0,1]$ tels que $a < b$, montrez que

$$\left| \fint_a^b u\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\, dx - \bar{u} \right| \le \frac{4\varepsilon}{b-a} \|u\|_{L^1([0,1])}.$$

Indication : pour tout $s \ge 0$, montrez que

$$\int_0^s u(x/\varepsilon)\, dx = \varepsilon \lfloor s/\varepsilon \rfloor \int_0^1 u(x)\, dx + \varepsilon \int_{\lfloor s/\varepsilon \rfloor}^{s/\varepsilon} u(x)\, dx$$

et que $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \left\lfloor \frac{s}{\varepsilon} \right\rfloor = s$.

2. Pour toute fonction $g \in \mathscr{C}_c^1(]0,1[)$, montrez que

$$\left| \int_0^1 u\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) g(x)\, dx - \bar{u}\bar{g} \right| \lesssim \varepsilon \|g'\|_{L^1([0,1])} \|u\|_{L^1([0,1])}.$$

Indication : justifiez soigneusement que

$$\int_0^1 u\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) g(x)\, dx = -\int_0^1 g'(x) \bigg(\int_0^x u\Big(\frac{s}{\varepsilon}\Big)\, ds \bigg)\, \mathrm{d}x.$$

3. Si $u \in L^\infty([0,1])$, prouvez que la limite que l'on peut déduire du point précédent reste valide pour tout $g \in L^1([0,1])$.

Indication : utilisez un résultat de densité approprié.

3.3 Appendice

Preuve du Théorème 3.1. La stratégie est la suivante. On approxime u par une fonction simple. On approxime les ensembles dans les indicatrices de la fonction simple à l'aide du théorème de régularité par un compact en-dessous et un ouvert au-dessus. On approxime alors les indicatrices elles-mêmes par des fonctions plateaux relativement aux compacts et aux ouverts identifiés dans le théorème de régularité. Ces fonctions plateaux vont donner lieu à la bonne fonction test.

Commençons par montrer qu'il existe une suite (s_k) de fonctions simples dans $L^{p_1}(\mu_1)\cap L^{p_2}(\mu_2)$ qui converge vers u dans $L^{p_1}(\mu_1)$ et dans $L^{p_2}(\mu_2)$. Supposons dans un premier temps que $u \geq 0$. Il existe une suite de fonctions simples Borel-mesurables (s_n) telle que $0 \leq s_k(x) \nearrow u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Comme $u \in L^{p_1}(\mu_1)\cap L^{p_2}(\mu_2)$, il suit que $s_k \in L^{p_1}(\mu_1)\cap L^{p_2}(\mu_2)$ pour tout k. Nous avons par ailleurs

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u - s_k|^{p_i}\, d\mu_i = \int_{\mathbb{R}^n} (u - s_k)^{p_i}\, d\mu_i.$$

Comme $(u - s_k)^{p_i} \to 0$ μ_i-presque partout (puisque cette convergence a en fait lieu partout) et que $0 \leq (u - s_k)^{p_i} \leq u^{p_i} \in L^1(\mu_i)$, on par convergence dominée que $\|u - s_k\|_{L^{p_i}(\mu_i)} \to 0$. Lorsque u est à valeurs réelles, il suffit d'appliquer le cas $u \geq 0$ aux parties positives et négatives de u respectivement et on aura $|s_n| \leq |u|$ pour tout n. Lorsque u est à valeurs complexes, on raisonne sur les parties réelles et complexes, respectivement, et on aura également $|s_n| \leq |u|$ pour tout n.

Fixons désormais $\varepsilon > 0$ et considérons alors une fonction simple $s := \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{1}_{E_k}$, où $c_k \in \mathbb{C}$, $E_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $N \geq 1$ et $\mu_i(E_k) < \infty$ pour tout $i = 1, 2$ et $k = 1, \ldots, N$, telle que $|s| \leq |u|$ et

$$\|u - s\|_{L^{p_1}(\mu_1)} + \|u - s\|_{L^{p_2}(\mu_2)} < \varepsilon.$$

Puisque $|s| \leq |u|$, le support de s est inclus dans celui de u. En particulier, puisque u n'est définie que sur Ω, alors s aussi et on a $E_k \subset \Omega$ pour tout k.

Soit $\nu := \mu_1 + \mu_2$. Comme μ_1 et μ_2 sont finies sur les compacts, ν l'est également. Fixons $k \in \{1, \ldots, N\}$. Comme $\nu(E_k) < \infty$, le théorème de régularité livre l'existence d'un compact K_k et d'un ouvert U_k tels que $K_k \subset E_k \subset U_k$ avec

$$\mu_1(U_k \setminus K_k) + \mu_2(U_k \setminus K_k) = \nu(U_k \setminus K_k) < \min\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{N(1+|c_k|)}\right)^{p_1}, \left(\frac{\varepsilon}{N(1+|c_k|)}\right)^{p_2} \right\}. \tag{3.2}$$

Comme $K_k \subset E_k$ et que $E_k \subset \Omega$, il suit que $K_k \subset \Omega$. De plus, quitte à remplacer U_k par $U_k \cap \Omega$ (rappelons-nous que U_k et Ω sont tous deux ouverts), on peut supposer que $U_k \subset \Omega$. Soit $\psi_k \in \mathscr{C}_c^\infty(U_k)$ une fonction plateau telle que $0 \leq \psi_k \leq 1$ et $\psi_k = 1$ sur K_k. Comme $U_k \subset \Omega$, on a que $\psi_k \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ pour tout k.

Posons $\varphi(x) := \sum_{k=1}^N c_k \psi_k(x) \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$. On a alors

$$\|s - \varphi\|_{L^{p_i}(\mu_i)} \leq \sum_{k=1}^N |c_k| \|\mathbb{1}_{E_k} - \psi_k\|_{L^{p_i}(\mu_i)} \tag{3.3}$$

A k fixé, on a

$$\psi_k = \mathbb{1}_{K_k} + \psi_k \mathbb{1}_{E_k \setminus K_k} + \psi \mathbb{1}_{U_k \setminus E_k} \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{E_k} = \mathbb{1}_{K_k} + \mathbb{1}_{E_k \setminus K_k}.$$

Comme, $0 \leq \psi_k \leq 1$, on a

$$|\mathbb{1}_{E_k} - \psi_k| = \left|(1 - \psi_k)\mathbb{1}_{E_k \setminus K_k} - \psi_k \mathbb{1}_{U_k \setminus E_k}\right| \leq \mathbb{1}_{E_k \setminus K_k} + \mathbb{1}_{U_k \setminus E_k} = \mathbb{1}_{U_k \setminus K_k}.$$

Il en résulte que

$$\|\mathbb{1}_{E_k} - \psi_k\|_{L^{p_i}(\mu_i)} \leq \mu_i(U_k \setminus K_k)^{1/p_i}.$$

Par (3.2), il résute que (3.3) livre

$$\|s - \varphi\|_{L^{p_i}(\mu_i)} \leq \sum_{k=1}^{N} |c_k| \mu_i(U_k \setminus K_k)^{1/p_i} \leq \sum_{k=1}^{N} |c_k| \nu(U_k \setminus K_k)^{1/p_i} \leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{|c_k|}{1 + |c_k|} \leq \varepsilon.$$

Nous avons donc

$$\|u - \varphi\|_{L^{p_i}(\mu_i)} \leq \|u - s\|_{L^{p_i}(\mu_i)} + \|s - \varphi\|_{L^{p_i}(\mu_i)} \leq 2\varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\|u - \varphi\|_{L^{p_1}(\mu_1)} + \|u - \varphi_\varepsilon\|_{L^{p_2}(\mu_2)} \leq 4\varepsilon.$$

Il existe donc une suite $(u_k) \subset \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que

$$\|u - u_k\|_{L^{p_1}(\mu_1)} + \|u - u_k\|_{L^{p_2}(\mu_2)} \to 0.$$

Si $u \geq 0$, alors à $\varepsilon > 0$ fixé, s est construit de telle sorte que $s \geq 0$. Comme $\psi_k \geq 0$ pour tout $k = 1, \ldots, N$, il suit que $\varphi \geq 0$. ∎

4 Espaces de Banach et opérateurs

4.1 Rappels

Soient E et F des espaces vectoriels normés. Un opérateur de E dans T est une application linéaire $T : E \to F$. L'opérateur est *borné* si

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F < \infty.$$

Lorsque T est borné, on a alors $\|Tx\|_F \leq \|T\| \, \|x\|_E$ pour tout $x \in E$. On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace des opérateurs bornés de E dans F, et $\mathscr{L}(E) := \mathscr{L}(E, E)$. Lorsqu'on T est un opérateur non-borné, on dit explicitement que "T est un opérateur non-borné". Lorsqu'on ne précise pas le caractère borné ou non de T, on entendra toujours, implicitement, que T est borné.

L'espace $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace vectoriel normé pour la norme opérateur introduite précédemment. On démontrera dans cette séance que si F est un espace de Banach, alors $\mathscr{L}(E, F)$ est aussi un espace de Banach pour la norme opérateur.

La norme sur $\mathscr{L}(E, F)$ induit une notion de convergence d'opérateurs, dite *convergence forte d'opérateurs* : si $(T_n) \subset \mathscr{L}(E, F)$ est une suite d'opérateurs (bornés) et $T \in \mathscr{L}(E, F)$ est un autre opérateur, on dit que (T_n) converge fortement vers T si

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T_n x - Tx\|_F \to 0.$$

On dira qu'une suite d'opérateurs $(T_n) \subset \mathscr{L}(E, F)$ *converge simplement (ou faiblement)* vers $T \in \mathscr{L}(E, F)$ si $T_n(x) \to T(x)$ pour tout $x \in E$.

On notera E^* le dual (topologique) de E, i.e. $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{C})$ est l'espace des formes linéaires continues sur E.

4.2 Enoncés des exercices

Exercice 4.1. Soient A, B et C des espaces vectoriels normés, $S \in \mathscr{L}(A, B)$ et $T \in \mathscr{L}(B, C)$ des opérateurs bornés. Montrez que $T \circ S \in \mathscr{L}(A, C)$ et que $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.

Exercice 4.2. Soient A et B les opérateurs définis sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par

$$A(x_0, x_1, \dots) := (0, x_0, x_1, \dots),$$
$$B(x_0, x_1, \dots) := (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

pour $x = (x_0, x_1, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Montrez que $\|A\| = \|B\| = 1$, et calculez BA et AB. Déduisez-en que A est injectif mais pas surjectif et que B est surjectif mais pas injectif.

Exercice 4.3. Soient E et F des espaces vectoriels. Calculez la norme opérateur de $T \in \mathscr{L}(E, F)$

lorsque

1. $E = L^\infty(\mathbb{R})$, $F = \mathbb{C}$ et $Tu = \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x)}{1+x^2}\,dx$.
2. $E = L^2(\mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}$ et $Tu = \int_{\mathbb{C}} \frac{u(x)}{1+|x|}$.
3. $E = \ell^1(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, $F = \ell^1(\mathbb{N})$ et $Tu(n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k u(k,n)$ où $(a_n) \subset \mathbb{C}$ est une suite complexe et bornée.

   Indication : $\|T\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$.

Solutions partielles de l'Exercice 4.3

1. Pour tout $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, on a $|Tu| \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$, avec

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} [\arctan(x)]_{-R}^{R} = \pi.$$

(Pouvez-vous justifier proprement l'écriture de l'intégrale comme limite lorsque $R \to \infty$?). On en déduit que $\|T\| \leq \pi$. Considérant $u = 1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, il vient par ailleurs que

$$Tu = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = \pi,$$

d'où l'on tire $\|T\| \geq \pi$ puisque $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1$. On en conclut que $\|T\| = \pi$.

2. Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$, l'inégalité de Hölder livre $|Tu| \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} (\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^2}\,dx)^{1/2}$, avec

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^2}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = 2\lim_{R\to\infty} \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^R = 2.$$

(A nouveau, pouvez-vous justifier proprement le passage à la limite ?) On en déduit que $\|T\| \leq \sqrt{2}$. Il suffit maintenant de prendre $u = (1+|x|)^{-1}/\sqrt{2} \in L^2(\mathbb{R})$ et d'observer que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ avec

$$Tu = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^2}\,dx = \sqrt{2},$$

pour conclure que $\|T\| \geq \sqrt{2}$ et, par conséquent, que $\|T\| = \sqrt{2}$. ∎

Exercice 4.4. Soient E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. Prouvez que $\mathscr{L}(E,F)$, muni de la norme opérateur, est complet.

Indication : considérez une suite d'opérateurs $(T_n)_n \subset \mathscr{L}(E,F)$ qui est de Cauchy dans $\mathscr{L}(E,F)$ et commencez par montrer que $(T_n x)_n$ est de Cauchy dans F pour tout $x \in E$ pour en déduire l'existence de $T \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $T_n \to T$ simplement sur E. Déduisez-en la convergence forte, i.e. au sens de la norme opérateur.

Exercice 4.5. Soient E et F des sous-ensembles mesurables d'espaces euclidiens. Soit $K : E\times F \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Soit T l'application linéaire définie, pour tout $u \in L^2(E)$, par

$$(Tu)(y) := \int_E K(x,y)\,u(x)\,dx, \quad y \in F.$$

Montrez que T est un opérateur borné de $L^2(E)$ dans $L^2(F)$ dans chacun des deux cas suivants

1. $K \in L^2(E\times F)$

   Indication : montrez que $|Tu(y)|^2 \leq \|u\|^2_{L^2[0,1]} \int_E |K(x,y)|^2\,dx$.
2. il existe $M_1, M_2 > 0$ tels que

$$\int_E |K(x,y)|\,dx \leq M_1$$

pour presque tout $y \in F$ et

$$\int_F |K(x,y)|\, dy \le M_2$$

pour presque tout $x \in E$.

Indication : montrez que $|Tu(y)|^2 \le M_1 \int_E |K(x,y)||u(x)|^2\, dx$.

Exercice 4.6. Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ un opérateur borné. On note $T^k := T \circ \ldots \circ T$ la composition de T avec lui-même k fois, $T^0 := \mathbb{1}$ et $\mathbb{1} : E \to E$ l'identité sur E.

1. Si $\|T\| < 1$, montrez que la suite d'opérateurs $S_n := \sum_{k=0}^n T^k$ converge dans $\mathscr{L}(E)$ vers un opérateur $S \in \mathscr{L}(E)$. On écrit $\sum_{k=0}^\infty T^k := S$. Lorsque S est bien défini, on dit que S est la *série de Neumann* associée à T.
2. Montrez que, si $\|T\| < 1$, alors $\mathbb{1} - T \in \mathscr{L}(E)$ est inversible et $(\mathbb{1} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty T^k \big(= S\big)$.
3. Soit $V \in \mathscr{L}(E)$ et supposons que V est inversible. Montrez que si $\|T - V\| < \|V^{-1}\|^{-1}$, alors T est inversible. Déduisez-en que $\{A \in \mathscr{L}(E) : A \text{ est inversible}\}$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$.

   Indication : montrez que $\|\mathbb{1} - V^{-1}T\| < 1$; déduisez-en que $V^{-1}T$ est inversible par le point 2 ; justifiez que $V^{-1}T$ est inversible et concluez.
4. Soient $A, B \in \mathscr{L}(E)$. Montrez que $\mathbb{1} - AB$ est inversible si et seulement si $\mathbb{1} - BA$ est inversible.

   Indication : trouver un lien entre la série de Neumann associée à AB et celle associée à BA lorsque $\|AB\| < 1$ et $\|BA\| < 1$. Déduisez-en un argument général pour la propriété ci-dessus.

Exercice 4.7. Si E est un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|_E$ et si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel muni d'une autre norme $\|\cdot\|_F$, on dit que F s'injecte continuement dans E si l'inclusion $i : F \to E, x \mapsto x$ est continue (i.e bornée).

1. Montrez que F s'injecte continuement dans E si et seulement si il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in F$, on a
$$\|x\|_E \le C\|x\|_F.$$
   Déduisez-en que si $G \subset F$ est un sous-espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|_G$ et si G s'injecte continuement dans F, alors l'inclusion $G \subset E$ est également continue.
2. Montrez que les inclusions suivantes sont continues (pour les normes naturelles associées à ces espaces) :
$$\mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega),$$
   où $1 < p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné. La première inclusion est-elle vraie si on remplace $\overline{\Omega}$ par Ω ? Lesquelles de ces inclusions restent vraies si Ω n'est pas borné ?

Exercice 4.8. Soient X, Y, Z des espaces de Banach. Soient $j : Y \to Z$ un opérateur borné injectif et $A : X \to Y$ une application linéaire (pas nécessairement continue !).

1. Montrez que si $j \circ A : X \to Z$ est continue (bornée), alors A l'est également.

   Indication : utilisez le théorème du graphe fermé.
2. Soient $p, q \in [1, \infty]$, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $T : L^p([a,b]) \to L^q([a,b])$ un opérateur borné. Déduisez du point précédent que si $T(L^p([a,b])) \subset \mathscr{C}^0([a,b])$, alors T est aussi borné comme opérateur de $L^p([a,b])$ dans $\mathscr{C}^0([a,b])$.
3. Ce dernier résultat est-il plus fort ?

Exercice 4.9. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in L^\infty([0,1])$ une fonction 1-périodique qui n'est pas égale presque partout à une constante. Pour tout $\varepsilon > 0$, définissons la forme linéaire $T_\varepsilon : L^1([0,1]) \to \mathbb{C}$ par

$$T_\varepsilon(g) := \int_0^1 u\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) g(x)\, dx, \quad \forall\, g \in L^1([0,1]).$$

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, justifiez que T_ε est une forme linéaire continue sur $L^1([0,1]$, i.e. $T \in L^1([0,1])^*$, avec $\|T_\varepsilon\| \leq \|u\|_{L^\infty([0,1])}$.
2. Justifiez que (T_ε) converge simplement dans $L^1([0,1])^*$ vers un certain $T \in L^1([0,1])^*$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Explicitez T et calculez $\|T\|$.
3. Justifiez qu'il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in L^1([0,1])$ 1-périodique telle que $g \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = 1/2$ et
$$\int_0^1 u(x)g(x)\, dx \neq \Big(\int_0^1 u(x)\, dx\Big)\Big(\int_0^1 g(x)\, dx\Big).$$
Indication : raisonnez par l'absurde pour arriver à la déduction (absurde) que
$$\int_0^1 u(x)f(x)\, dx = \Big(\int_0^1 u(x)\, dx\Big)\Big(\int_0^1 f(x)\, dx\Big)$$
pour tout $f \in L^1([0,1])$ et choisissez enfin $f = u$ pour conclure que u devrait être égale presque partout à une constante.
4. Soit g comme au point 3. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $g_\varepsilon(x) := g(x/\varepsilon)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Justifiez que $\|g_\varepsilon\|_{L^1([0,1])} \leq 1$ pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et montrez que $T_\varepsilon(g_\varepsilon) - T(g_\varepsilon)$ converge dans $\mathbb{C}$ vers une limite non nulle lorsque $\varepsilon \to 0^+$.
5. Déduisez-en que (T_ε) ne converge pas fortement vers T lorsque $\varepsilon \to 0^+$.

Exercice 4.10. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Alors la dimension de E est soit finie soit non-dénombrable.

Indication : supposez, par l'absurde, que E est de dimension non-finie et dénombrable, considérez une base $(e_n)_{n\geq 1}$ de E et appliquez le théorème de Baire aux ouverts $O_n := E \setminus F_n$, où $F_n := \mathrm{vect}\{e_1, \dots, e_n\}$ pour tout $n \geq 1$.

Application : il n'existe aucune norme sur $\mathbb{R}[X]$ qui en fasse un espace complet ! (Attention c'est de *normes* qu'il s'agit ici, pas de distances générales).

4.3 Pour aller plus loin

Exercice 4.11. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

1. On définit l'espace $\mathscr{C}(\Omega)$, aussi noté $\mathscr{C}_b^0(\Omega)$, comme la collection des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}^0(\Omega)$ telles que
$$\|u\|_{\mathscr{C}(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty.$$
Montrez que $(\mathscr{C}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathscr{C}(\Omega)})$ est un espace de Banach.
2. Soit $k \geq 0$. On définit $\mathscr{C}_b^k(\Omega)$ comme la collection des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}^k(\Omega)$ pour lesquelles
$$\|u\|_{\mathscr{C}_b^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|_{\mathscr{C}(\Omega)} < \infty.$$
Dit autrement, $u \in \mathscr{C}_b^k(\Omega)$ si $u \in \mathscr{C}^k(\Omega)$, u est bornée sur Ω et toutes ses dérivées mixtes jusqu'à l'ordre k sont également bornées sur Ω. Montrez que $(\mathscr{C}_b^k(\Omega), \|\cdot\|_{\mathscr{C}_b^k(\Omega)})$ est un espace de Banach. Montrez que $\mathscr{C}_b^{k+1}(\Omega) \subset \mathscr{C}_b^k(\Omega) \subset \mathscr{C}(\Omega)$ et que ces inclusions sont continues.
3. Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ et supposons que $|u(x) - u(y)| \leq C\|x - y\|^\gamma$, pour tous $x, y \in \Omega$, une certaine constante $C > 0$ et un certain $\gamma > 0$. Montrez que, si Ω est connexe (par arcs) et si $\gamma > 1$, alors u est constante sur Ω. Lorsque $0 < \gamma \leq 1$, on dit que u est γ-Hölderienne et on note
$$[u]_\gamma := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\gamma}.$$

4. Soit $k \geq 0$ et $0 < \gamma \leq 1$. On définit l'espace $\mathscr{C}^{k,\gamma}(\Omega)$ comme la collection des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}_b^k(\Omega)$ pour lesquelles

$$\|u\|_{\mathscr{C}^{k,\gamma}(\Omega)} := \|u\|_{\mathscr{C}_b^k(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} [\partial^\alpha u]_\gamma < \infty.$$

   Montrez que $(\mathscr{C}^{k,\gamma}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathscr{C}^{k,\gamma}(\Omega)})$ est un espace de Banach.

5. Pour tout $k \geq 0$ et tout $\gamma \in (0,1]$, montrez que $\mathscr{C}^{k,\gamma}(\Omega) \subset \mathscr{C}_b^k(\Omega)$ et que l'inclusion est continue. Si Ω est borné et convexe et si $\beta, \gamma \in (0,1]$ avec $\beta < \gamma$, montrez que $\mathscr{C}_b^{k+1}(\Omega) \subset \mathscr{C}^{k,\gamma}(\Omega) \subset \mathscr{C}^{k,\beta}(\Omega) \subset \mathscr{C}_b^k(\Omega)$ et que ces inclusions sont continues.

5 Espaces de Hilbert

5.1 Rappels

On notera $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré égal ou inférieur à n à coefficients réels.

Proposition 5.1 (Inégalité de Bessel)**.** Soit H un espace pré-hilbertien (i.e. un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mais pas nécessairement complet). Soit $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de vecteurs orthonormés de H. Alors pour tout $x \in H$, $(|\langle x, e_n \rangle|)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Soit H un espace de Hilbert (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, selon le contexte) non trivial, i.e. $\dim_{\mathbb{K}}(H) \geq 1$. Nous noterons $\mathbb{1}$ l'identité sur H, i.e. $\mathbb{1} : H \to H, x \mapsto x$.

Proposition 5.2 (Projection orthogonale)**.** Soit $M \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé non-vide. Pour tout $x \in H$, il existe un unique $m \in M$ tel que $\|x - m\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$. De plus, m est caractérisé par les deux propriétés : $m \in M$ et $x - m \in M^\perp$, i.e. $\langle x - m, y \rangle = 0$ pour tout $y \in M$.

Théorème 5.3 (Décomposition orthogonale)**.** Soit $M \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé non-vide. Alors on a la décomposition de H suivante : $H = M \oplus M^\perp$, au sens où pour tout $x \in H$, il existe des uniques $x_M \in M$ et $x_{M^\perp} \in M^\perp$ tels que $x = x_M + x_{M^\perp}$.

Proposition 5.4. Soit $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de vecteurs orthonormés dans H. Etant donné une suite de scalaires $(c_k) \subset \mathbb{K}$, la suite $(\sum_{k=0}^n c_k e_k)_n$ converge dans H si et seulement si $(c_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Dans ce cas, on dit que la série $\sum_{k=0}^\infty c_k e_k$ converge dans H.

5.2 Enoncés des exercices

Exercice 5.5. Quelques identités pratiques.

1. Prouvez le *théorème de Pythagore* : pour tous $x, y \in H$, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2.$$

2. Prouvez l'*identité de polarisation* : pour tous $x, y \in H$, on a

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\Big(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\Big).$$

Exercice 5.6. Soit E un sous-espace de H.

1. Si $\overline{E} \neq H$, montrez que pour tout $x \in H \setminus \overline{E}$, il existe $\alpha \in H^*$ vérifiant $\alpha(x) = 1$ et $\alpha(y) = 0$ pour tout $y \in E$.
2. Déduisez-en que pour tous $x, y \in H$, $x \neq y$, il existe $\alpha \in H^*$ qui sépare x et y, i.e. $\alpha(x) \neq \alpha(y)$.

Exercice 5.7. Soient $x_0 \in H$ et M un sous-espace fermé de H. Montrez que

$$\min\{\|x_0 - x\| \,:\, x \in M\} = \max\{|\langle x_0, y\rangle| \,:\, y \in M^\perp, \|y\| = 1\}.$$

Exercice 5.8. Définissons E comme l'ensemble des polynômes $p \in \mathbb{R}_3[X]$ qui satisfont

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \int_{-1}^{1} xp(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 p(x)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} |p(x)|^2\,dx = 1 \tag{5.1}$$

1. Pour tout $n \geq 1$, prouvez que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace fermé de $L^2([-1,1])$.
   Indication : considérez une base de $\mathbb{R}_n[X]$ orthonormée dans $L^2([-1,1])$ et décomposez les polynômes dans cette base.
2. En utilisant la géométrie des espaces de Hilbert, calculez
$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2\,dx.$$
3. Trouvez $\max_{p\in E} \int_{-1}^{1} x^3 p(x)\,dx$ et justifiez que
$$\max_{p\in E} \int_{-1}^{1} x^3 p(x)\,dx = \max_{f\in F} \int_{-1}^{1} x^3 f(x)\,dx,$$
   où F consiste des $p \in L^2([-1,1])$ (pas nécessairement polynomiaux) qui satisfont (5.1).

Exercice 5.9 (Convergence faible)**.** Soient $(x_n) \subset H$ et $x \in H$.

1. Montrez que $x_n \to x$ si et seulement si $\|x_n\| \to \|x\|$ et $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ pour tout $y \in H$.
2. Si H est de dimension finie, montrez que $x_n \to x$ si et seulement si $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ pour tout $y \in H$.
3. Considérons $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et $(x_n) \subset \ell^2(\mathbb{N})$ définie par $x_n(k) := \delta_{k,n}$ (la “base canonique” de $\mathbb{R}^\infty$). Montrez que $\langle x_n, y\rangle \to 0$ pour tout $y \in H$ mais qu'on n'a pas $x_n \to 0$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

Lorsque $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ pour tout $y \in H$, on dit que (x_n) *converge faiblement* vers x dans H et on écrit $x_n \rightharpoonup x$.

Exercice 5.10 (Compacité faible)**.** Pour cet exercice, nous supposerons que H est muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$. Soit $(x_n) \subset H$ une suite bornée dans H.

1. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, justifiez que $(\langle x_n, e_j\rangle)_n$ est bornée dans $\mathbb{C}$.
2. Justifiez que (x_n) admet une sous-suite (x_{k_n}) telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\langle x_{k_n}, e_j\rangle$ converge dans $\mathbb{C}$ lorsque $n \to \infty$.
   Indication : attention, la sous-suite (x_{k_n}) est la même pour tous les j !
3. Soit $V = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \ldots\}$. Pour tout $x \in V$, prouvez que $(\langle x_{k_n}, x\rangle)_n$ converge dans $\mathbb{C}$.
4. Pour tout $z \in H$, montrez que $(\langle x_{k_n}, z\rangle)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$.
   Indication : utilisez que V est dense dans H pour approximer z.
5. Définissons $T : H \to \mathbb{C}$ par $Tz := \lim_{n\to\infty}\langle x_{k_n}, z\rangle$. Justifiez que $T \in H^*$.
6. Déduisez-en qu'il existe $x \in H$ tel que $x_{k_n} \rightharpoonup x$ dans H (voir Exercice 5.9).
   Indication : utilisez le théorème de Riesz.

Ce résultat offre une consolation à la perte de compacité des fermés bornés en dimension infinie. Il s'agit en effet d'une généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass à tout espace de Hilbert. Le prix à payer pour cela est que seule la convergence faible est garantie. Cette convergence s'avère cependant suffisante dans un certain nombre de problèmes.

Exercice 5.11. Soient $(x_n) \subset H$ et $x \in H$. Supposons que $x_n \rightharpoonup x$ dans H. Pour tout n, définissons $T_n \in H^*$ par $T_n z := \langle x_n, z \rangle$ pour tout $z \in H$.

1. Pour tout $z \in H$, justifiez que $\sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n z| < \infty$.
2. Utilisez le principe de la borne uniforme pour en déduire que (x_n) est bornée.

Exercice 5.12. Considérons

$$B := \left\{ [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

le système orthonormé de Fourier sur $[0, 2\pi]$.

1. Si l'on note $S_n(u)$ la somme partielle de Fourier de $u \in L^2([0, 2\pi])$ (voir Proposition 2.13), montrez que
$$\|S_n(u) - S_n(v)\|_{L^2([0,2\pi])} \leq \|u - v\|_{L^2([0,2\pi])}$$
pour tous $u, v \in L^2([0, 2\pi])$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrez que B est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$.
   Indication : approximez u et utilisez le théorème de Dirichlet global.

Exercice 5.13. Soit H_0 un sous-espace fermé de H. Soient P la projection orthogonale sur H_0 et Q la projection orthogonale sur $H_0^\perp$. Montrez que P et Q sont auto-adjoints.

Exercice 5.14.

1. Pour $(\alpha_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que $\alpha_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons l'opérateur T sur $\ell^2(\mathbb{N})$ donné par
$$T(x_0, x_1, x_2, \dots) := (0, \alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \dots)$$
pour tout $(x_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$. On appelle T l'opérateur de *shift à poids* associé à la suite de poids (α_n). Calculez son adjoint.
2. Considérons l'*opérateur de Volterra* donné par
$$(Vf)(y) := \int_0^y f(x)\, dx$$
pour tout $f \in L^2([0, 1])$. Il s'agit d'un opérateur intégral à noyau, dont le noyau est la fonction indicatrice sur l'ensemble $\{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x < y\}$. Calculez son adjoint.

Exercice 5.15. Soit $T \in \mathscr{L}(H)$.

1. Montrez que
$$\|T\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |\langle Tx, y \rangle|.$$
2. Déduisez-en que $T^* \in \mathscr{L}(H)$ et que $\|T^*\| = \|T\|$.
   Indication : Observez que le point 1 reste valide sous la seule hypothèse que T est une application linéaire (pas nécessairement bornée) et appliquez le point 1 à T^*.
3. Montrez que $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$ et $\mathrm{Im}(T^*) \subset \mathrm{Ker}(T)^\perp$.
4. Vérifiez que $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$.
   Indication : utilisez $(T^*)^* = T$ (dont la preuve est élémentaire).
5. Prouvez que la condition $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$ est équivalente à $T^*T = \mathbb{1}$.
   Indication : utilisez l'identité de polarisation.

5.3 Pour aller plus loin

Exercice 5.16. Supposons que H est de dimension infinie. Soit $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de vecteurs orthonormés dans H.

1. Montrez que A est fermé, borné, mais pas compact. Déduisez-en que la boule unité dans H n'est pas compacte.
2. Soit $(\delta_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$. On définit le "cube de Hilbert"

$$Q := \left\{ x \in H \,:\, x = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) e_n,\, c(n) \in \mathbb{K},\ |c(n)| \leq \delta_n \right\}$$

   (a) Montrez que pour tout $x = \sum_{n \geq 0} c(n) e_n \in Q$, on a $\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |c(n)|^2$.

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $x_k := \sum_{n \geq 0} c_k(n) e_n \in Q$ où $(c_k(n))_n \in \ell^2(\mathbb{N})$. Supposons qu'il existe $c \in \ell^2(\mathbb{N})$ et une sous-suite (c_{k_j}) de (c_k) tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{k_j}(n) \to c(n)$ lorsque $j \to \infty$. Justifiez que, dans ce cas, (x_{k_j}) converge dans H.

   (c) Pour toute suite $(x_k) \subset Q$ avec $x_k = \sum_n c_k(n) e_n \in Q$, $k \geq 1$, montrez qu'il existe $c \in \ell^2(\mathbb{N})$ et une sous-suite (c_{k_j}) de (c_k) tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{k_j}(n) \to c(n)$ lorsque $j \to \infty$.

   (d) Concluez que Q est compact.

6 Distributions

6.1 Rappels

Considérons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Etant donné $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ et une suite $(\varphi_k)_{k\geq 1} \subset \mathscr{C}^\infty(\Omega)$, on dit que (φ_k) converge vers φ dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $(\partial^\alpha \varphi_k)$ converge uniformément sur tout compact vers $\partial^\alpha \varphi$ lorsque $k \to \infty$.

Etant donné $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et une suite $(\varphi_k)_{k\geq 1} \subset \mathscr{D}(\Omega)$, on dit que (φ_k) converge vers φ dans $\mathscr{D}(\Omega)$ s'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset K$ pour tout $k \geq 1$ et tel que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha(\varphi_k - \varphi)(x)| \to 0$ lorsque $k \to \infty$.

Définition 6.1. Une distribution sur Ω est une application linéaire $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K}, \varphi \to \langle \Lambda, \varphi \rangle$ telle que pour toute suite (φ_k) qui converge vers 0 dans $\mathscr{D}(\Omega)$ lorsque $k \to \infty$, $\langle \Lambda, \varphi_k \rangle \to 0$ lorsque $k \to \infty$. L'ensemble des distributions sur Ω est noté $\mathscr{D}(\Omega)'$.

En pratique, lorsqu'une application linéaire sur $\mathscr{D}(\Omega)$ est donnée, on peut vérifier qu'il s'agit d'une distribution à partir de la définition ou on peut utiliser la caractérisation des distributions suivante.

Proposition 6.2. Etant donné une application linéaire $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$, on a que Λ est une distribution sur Ω si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $p_K \in \mathbb{N}$ et $C_K > 0$ tels que

$$|\langle \Lambda, \varphi \rangle| \leq C_K \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\leq p_K}} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ dont le support est inclus dans K.

Si $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{K})$, la distribution $\Lambda_u \in \mathscr{D}(\Omega)'$ associée à u est la distribution définie par

$$\langle \Lambda_u, \varphi \rangle := \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. De même, si μ est une mesure borélienne finie sur les compacts de Ω on définit la distribution Λ_μ par

$$\langle \Lambda_\mu, \varphi \rangle := \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu(x), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

La convergence dans $\mathscr{D}(\Omega)'$ est la convergence ponctuelle, i.e. si $\Lambda \in \mathscr{D}(\Omega)'$ et $(\Lambda_k) \subset \mathscr{D}(\Omega)'$, on dit que $\Lambda_k \to \Lambda$ dans $\mathscr{D}(\Omega)'$ si $\langle \Lambda_k, \varphi \rangle \to \langle \Lambda, \varphi \rangle$ dans $\mathbb{K}$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ lorsque $k \to \infty$.

Lorsque u et u_k, $k \geq 1$, sont des fonctions $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, on dit que (u_k) converge vers u dans Ω au sens des distributions si $\Lambda_{u_k} \to \Lambda_u$ dans $\mathscr{D}(\Omega)'$, i.e. si

$$\int_\Omega u_k(x)\varphi(x)\,dx \to \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx$$

lorsque $k \to \infty$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Similairement, une suite de mesures (μ_k) sur $\mathcal{B}(\Omega)$ converge vers une mesure μ sur $\mathcal{B}(\Omega)$ au sens des distributions si $\Lambda_{\mu_k} \to \Lambda_\mu$ dans $\mathscr{D}(\Omega)'$, i.e. si

$$\int_\Omega \varphi\,d\mu_k \to \int_\Omega \varphi\,d\mu$$

lorsque $k \to \infty$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. De plus, la convergence au sens des distributions nous autorise à écrire des choses comme : $\mu_k \to u$ dans $\mathscr{D}(\Omega)'$, ou encore $u_k \to \mu$ dans $\mathscr{D}(\Omega)'$. De manière générale, une propriété a lieu *au sens des distributions* lorsque cette propriété est vraie en évaluant pour toute fonction test. Par exemple, deux fonctions $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{K})$ sont égales au sens des distributions si les distributions associées à f et à g sont égales, i.e. $\Lambda_f = \Lambda_g$, i.e. $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, i.e. $f = g$ presque partout dans Ω.

Le support d'une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est défini comme

$$\mathrm{supp}(f) := \bigcap_{\substack{U \subset \Omega \text{ ouvert} \\ f=0 \text{ p.p. sur } U}} (\Omega \setminus U).$$

Si $U \subset \Omega$ est ouvert, on dit que $\Lambda \in \mathscr{D}(\Omega)'$ s'annule sur U si $\langle \Lambda, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(U)$. On définit alors le support de Λ

$$\mathrm{supp}(\Lambda) := \bigcap_{\substack{U \subset \Omega \text{ ouvert} \\ \Lambda=0 \text{ sur } U}} (\Omega \setminus U).$$

Si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire leur convolée

$$(u * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\widetilde{\tau_{-x}\varphi}(y)\,dy,$$

où $\widetilde{\psi}(x) := \psi(-x)$ et $(\tau_z\psi)(x) := \psi(x-z)$ pour toute fonction ψ. Si $\Lambda \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)'$, la convolée $\Lambda * u$ est la fonction

$$\Lambda * u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ x \mapsto \langle \Lambda, \widetilde{\tau_{-x}u} \rangle = \langle \Lambda, u(x - \cdot) \rangle.$$

A noter que $\widetilde{\tau_{-x}u} = \tau_x(\widetilde{u})$.

6.2 Enoncés des exercices

Exercice 6.3. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Montrez que $\mathrm{supp}(\Lambda_f) = \mathrm{supp}(f)$.

Exercice 6.4. Montrez que les applications suivantes sont des distributions sur $\mathbb{R}$:

1. $\Lambda : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^{(j)}(j)$. Montrez que cette distribution est d'ordre infini.
2. la *valeur principale de Cauchy* de $\frac{1}{x}$, qui est définie par

$$\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Montrez d'abord que cette application linéaire est bien définie pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et ensuite

que
$$\langle \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}, dx, \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

Quel est l'ordre de cette distribution ? Que vaut le produit $x\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$?

INDICATION : pour tout $\varepsilon > 0$, montrez que $\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\varepsilon<|x|<N} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx$ pour tout N choisi adéquatement.

Exercice 6.5. Montrez que la suite de fonctions $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$ converge au sens des distributions dans $\mathbb{R}$ lorsque $n \to \infty$. Déterminez la limite distributionnelle.

Exercice 6.6. Soit $T : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une distribution sur $\mathbb{R}$ telle que $xT = 0$.

1. Soit $\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ une fonction fixée, telle que $\alpha(0) = 1$. Montrez que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ il existe une fonction $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) - \varphi(0)\alpha(x) = x\psi(x)$.
   INDICATION : justifiez que $\varphi(x) - \varphi(0)\alpha(x) = x\int_0^1 (\varphi'(tx) - \varphi(0)\alpha'(tx))\,dt$.
2. Montrez qu'il existe une constante complexe c telle que $T = c\delta$ où δ est la distribution de Dirac en 0.

Ce résultat illustre, une fois de plus, le raffinement qu'offre la théorie des distributions par rapport à la théorie des fonctions. En effet, si T est une fonction telle que $xT(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $T(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En particulier, $T = 0$ presque partout et
$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} T(x)\varphi(x)\,dx = 0$$
pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. En relâchant des conditions sur T, à savoir qu'on n'exige désormais plus que T soit nécessairement une fonction mais seulement une distribution, alors on a $T = c\delta$ où $c \in \mathbb{C}$, i.e.
$$\langle T, \varphi\rangle = c\varphi(0)$$
pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. On retrouve bien le cas $T = 0$ lorsque $c = 0$ mais on a trouvé, au passage, d'autres possibilités offrant davantage de sensibilité sur le comportement de T autour de $x = 0$.

Exercice 6.7. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $x_0 \in \Omega$. Soit $(f_k) \subset L^1(\Omega)$ une suite d'*approximants de l'identité en* x_0 *dans* Ω, i.e. $f_k \geq 0$ pour tout k, $\|f_k\|_{L^1(\Omega)} \to 1$ lorsque $k \to \infty$ et
$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega\setminus B(x_0,\delta)} f_k\,dx = 0, \quad \forall\ \delta > 0,$$
i.e. “toute la masse des f_k se concentre sur x_0 lorsque $k \to \infty$”.

1. Montrez que $f_k \to \delta_{x_0}$ au sens des distributions dans Ω lorsque $k \to \infty$.
2. Si une suite de fonctions $(g_k) \subset L^1(\Omega)$ est telle que $g_k \geq 0$, $\|g_k\|_{L^1(\Omega)} \to 1$ et $\mathrm{supp}(g_k) \subset B(x_0, \varepsilon_k)$ pour tout k, où (ε_k) est une suite positive qui tend vers 0 lorsque $k \to \infty$, montrez que (g_k) est une suite d'approximants de l'identité en x_0 dans Ω.
3. Soit $p_\sigma(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, la densité de la loi normale centrée de variance $\sigma > 0$. Montrez que $(p_\sigma)_{\sigma>0}$ est une suite d'approximants de l'identité en 0 dans $\mathbb{R}$ (pour $\sigma \to 0$).
4. De manière générale, considérons une suite de densités de probabilité (ψ_k) dans $\mathbb{R}$, de moyennes $\mu_k \to \mu \in \mathbb{R}$, i.e. $\psi_k \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \psi_k(x)\,dx = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} x\psi_k(x)\,dx = \mu_k$ pour tout k. Pour tout k, soit Z_k une variable aléatoire de loi ψ_k et supposons que $\mathrm{Var}[Z_k] \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Montrez que $\psi_k \to \delta_\mu$ au sens des distributions lorsque $k \to \infty$.

En mécanique quantique, ce phénomène est appelé *réduction du paquet d'onde* (*wave function collapse* en anglais) : des densités de probabilités, strictement positives en tout point de l'espace, convergent vers une densité de probabilité singulière, concentrée en un unique point de l'espace (un delta de Dirac). Les fonctions $\sqrt{\psi_k} \in L^2(\mathbb{R})$ sont appelées *fonctions d'ondes* et représentent l'état d'une particule au cours du temps et $\psi_k(x)$ est interprété comme la densité de probabilité de présence de la particule en x au temps k. Lorsqu'un observateur mesure la position de la particule en μ, on dit (de façon impropre) que "l'incertitude sur la position de la particule" disparait ($\mathrm{Var}[Z_k] \to 0$) et que la fonction d'onde se réduit en un Dirac planté en la position observée ($\psi_k \to \delta_\mu$).

Exercice 6.8. Etant donné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $T \in \mathscr{D}(\Omega)'$ une distribution sur Ω et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, montrez que $\partial^\alpha T$ est également une distribution sur Ω, où $\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Exercice 6.9. Justifiez que la fonction $\ln|x|$, prolongée arbitrairement en $x = 0$, donne lieu à une distribution sur $\mathbb{R}$ et déterminez sa dérivée distributionnelle.

Exercice 6.10. Montrez que si une distribution sur $\mathbb{R}$ possède une dérivée nulle, alors elle est (la distribution associée à une) constante.

1. Soit $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Montrez que $\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)dx = 0$ si et seulement si il existe une fonction $\phi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\phi_1' = \chi$.
2. Soit $\phi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ une fonction fixée telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x)dx = 1$. Montrez que pour toute fonction $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\phi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tels que $\phi = \lambda\phi_0 + \phi_1'$. Calculez λ.
3. Utilisez le point précédent pour conclure.

Exercice 6.11. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Montrez que $F(x) := \int_0^x f(y)\,dy$, $x \in \mathbb{R}$, est dérivable au sens des distributions. Identifiez sa dérivée distributionnelle.

Indication : il faut lire $F(x)$ comme $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$ si $x > 0$, $F(x) = -\int_x^0 f(y)\,dy$ si $x < 0$.

Exercice 6.12. Soit $T : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^n)$ une application linéaire satisfaisant la propriété de continuité suivante : pour toute suite $(\varphi_k) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers 0 dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $k \to \infty$, on a $(T\varphi_k)(0) \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Supposons de plus que T est *shift-invariant*, i.e. $\tau_x T = T\tau_x$ sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, définissons $\langle \Lambda, \varphi\rangle := (T\widetilde{\varphi})(0)$. Justifiez que Λ est bien définie sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.
2. Démontrez que Λ est une distribution sur $\mathbb{R}^n$.
3. Démontrez que $T\varphi = \Lambda * \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.
4. Montrez que Λ est l'unique distribution sur $\mathbb{R}^n$ avec la propriété précédente.
5. Justifiez que T est en fait à valeurs dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et, de plus, que $T : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est continue pour les convergences associées à $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

En mathématiques appliquées et en ingénierie, un *système* est représenté par un opérateur agissant sur un signal d'entrée et renvoyant un signal de sortie (un appareil photo, un écran, une imagerie médicale, etc.). L'invariance par shift signifie concrètement que si le signal d'entrée est decalé (dans l'espace ou dans le temps, typiquement), le signal de sortie se voit décalé de la même manière, ce qui est par exemple le cas des baffles/enceintes, des appareils photos et de certaines imageries médicales. Ce théorème vient dire que tout système shift-invariant est représenté par une convolution, ce qui motive l'étude appronfondie et l'usage intensif dans ces disciplines des opérateurs de convolution. Lorsque Λ est représenté par une fonction K (le *noyau de convolution* ou *kernel* en anglais), on appelle K la *réponse du système*, une terminologie motivée par le fait qu'on a, formellement, $\langle T, \delta_x\rangle = K * \delta_x = K(x)$, i.e. $K(x)$ est la valeur renvoyée par le système lorsque le signal d'entrée est une impulsion concentrée au point x.

Exercice 6.13. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $(f_k) \subset L^2(\Omega)$. Justifiez que $f_k \rightharpoonup f$ dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si (f_k) est bornée dans $L^2(\Omega)$ et $f_k \to f$ dans $\mathscr{D}(\Omega)'$.

7 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$

7.1 Rappels

Pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on définit la transformée de Fourier de u

$$\widehat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\, dx, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

La fonction $\widehat{u}$ appartient à $\mathscr{C}_b^0(\mathbb{R}^n)$ et tend vers 0 lorsque $\|\xi\| \to \infty$, i.e. $\widehat{u} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 7.1. Soient $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et $m \in \mathbb{N}$. Si $(1 + \|x\|)^m u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{u} \in \mathscr{C}_b^m(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \le m$, on a

$$(\partial^\alpha \widehat{u})(\xi) = \widehat{(-2i\pi x)^\alpha u}\,(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (-2i\pi x)^\alpha u(x) e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\, dx.$$

Proposition 7.2 (Passage du chapeau)**.** Soient $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\widehat{v}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(x) v(x)\, dx$.

Proposition 7.3 (Classe de Schwartz)**.** On définit la classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathbb{R}^n$ comme l'ensemble des fonctions $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ telles que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \psi(x)| < \infty.$$

La transformée de Fourier est une opération interne à la classe de Schwartz et inversible dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$: si $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{\psi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et il existe $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\psi = \widehat{\varphi}$.

Théorème 7.4 (Identité de Parseval)**.** Soient $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors $\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{v(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(x)\overline{\widehat{v}(x)}\, dx$.

Définition 7.5. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Le polynôme de Taylor de f d'ordre $N \in \mathbb{N}$ autour de $a \in \mathbb{R}$ est le polynôme $T_N(f,a) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ défini par

$$T_N(f,a)(x) := \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il existe $c \in \mathbb{R}$ (dépendant de N, a et x) compris strictement entre a et x tel que

$$f(x) - T_N(f,a)(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}\,(x-a)^{N+1}.$$

La série de Taylor de f autour de a est la série (formelle) $T(f,a)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a)(x-a)^k,\ x \in \mathbb{R}$.

7.2 Enoncés des exercices

Exercice 7.6. Démontrez que

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \Big\{\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^m |\partial^\beta \psi(x)| < \infty,\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, \beta \in \mathbb{N}^n\Big\}.$$

Déduisez-en que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \bigcap_{p\in[1,\infty]} L^p(\mathbb{R}^n)$. Justifiez que si $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, alors la partie réelle et la partie imaginaire de ψ appartiennent également à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

L'exercice suivant généralise le théorème de convolution vu au cours dans le cas où $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 7.7 (Théorème de convolution)**.** Soient $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Justifiez que $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrez par un calcul direct que $\widehat{u * v}(\xi) = \widehat{u}(\xi)\widehat{v}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

L'exercice suivant montre que la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ est injective.

Exercice 7.8. Soient $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrez que si $\widehat{u} = \widehat{v}$, alors $u = v$ presque partout.

Indication : utilisez le passage du chapeau et l'inversibilité de la transformée de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pour montrer que $u = v$ au sens des distributions et concluez.

L'exercice suivant généralise aux fonctions de classe $\mathscr{C}^1_b(\mathbb{R}^n)$ un résultat vu au cours pour les fonctions dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 7.9. Soit $u \in \mathscr{C}^1_b(\mathbb{R}^n)$. Etant donné $j \in \{1, \ldots, n\}$, montrez que si u et $\partial_j u$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^n$ alors

$$\widehat{\partial_j u}(\xi) = 2i\pi\xi_j\ \widehat{u}(\xi), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Indication : montrez l'égalité au sens des distributions et concluez. Vous pouvez utiliser l'identité de Green, valable pour toutes fonctions $f \in \mathscr{C}^1_b(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, sans la démontrer.

L'exercice suivant étend l'identité de Parseval, vue au cours pour deux fonctions dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, au cas où l'une est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et l'autre dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 7.10 (Identité de Parseval)**.** Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Considérons une suite $(u_k) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|u_k - u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$ lorsque $k \to \infty$.

1. Montrez que $\|\widehat{u_k} - \widehat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0$ lorsque $k \to \infty$.
2. Concluez-en que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{\psi(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(x)\overline{\widehat{\psi}(x)}\, dx, \quad \forall\, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Indication : utilisez l'identité de Parseval sur u_k et ψ qui sont dans la classe de Schwartz.

L'exercice suivant affaiblit les hypothèses nécessaires pour obtenir une formule d'inversion de Fourier : il n'est pas nécessaire de supposer que u est continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$. En effet, ce sera une conséquence de la formule d'inversion, puisque u sera la transformée de Fourier d'une fonction intégrable. Le simple fait que $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ impliquera que u est bornée et égale presque partout à une fonction continue.

Exercice 7.11 (Formule d'inversion)**.** Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et supposons que $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

1. A l'aide de l'identité de Parseval de l'Exercice 7.10 et du passage du chapeau, montrez que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\widehat{u}}(-x)\varphi(x)\, dx, \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Indication : écrivez $\widetilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$ et observez que $\overline{\widehat{\varphi}} = \widehat{\widetilde{\varphi}}$.

2. Déduisez-en que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle}\, d\xi \qquad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

3. Justifiez que si u est continue en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ alors l'égalité précédente a lieu lorsque $x = x_0$.

Exercice 7.12. Etant donné $k > 0$, posons $f_k(x) = \frac{1}{2k} e^{-k|x|}$.

1. Calculez la transformée de Fourier de f_k.
2. Déduisez-en la transformée de Fourier de la fonction $g_{a,b}(x) = \frac{1}{a^2+(bx)^2}$ pour tous $a, b > 0$.
3. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, calculez la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(cx)}{1+x^2}\, dx.$$

4. Déterminez la fonction intégrable f solution de l'équation intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{1+(x-y)^2} dy = \frac{1}{x^2+4}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Indication : utilisez le théorème de convolution.

Exercice 7.13. Soient $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et $k > 0$.

1. Soit $\phi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ et supposons que $\phi, \phi' \in L^1(\mathbb{R})$. En utilisant la transformée de Fourier, montrez que si

$$\phi''(x) - k^2\phi(x) = g(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

alors

$$\phi(x) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{g}(\xi)}{(2\pi\xi)^2 + k^2} e^{2i\pi x\xi}\, d\xi, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

2. Inversément, posons

$$\phi_g(x) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{g}(\xi)}{(2\pi\xi)^2 + k^2} e^{2i\pi x\xi}\, d\xi, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(a) Justifiez que ϕ_g est bien définie et appartient à $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

(b) Observez que $\widehat{g}(\xi)e^{2i\pi x\xi} = \widehat{\tau_{-x}g}(\xi)$, où $(\tau_{-x}g)(y) = g(y+x)$, et déduisez-en que

$$\phi_g(x) = -\frac{1}{2k}\int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{-k|x-\xi|}\, d\xi = -(g * f_k)(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

où $f_k(\xi) = \frac{1}{2k}e^{-k|\xi|}$.

(c) Prouvez que $\phi_g \in \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R})$ avec

$$\phi_g'(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} g(\xi)\operatorname{sgn}(x-\xi)e^{-k|x-\xi|}\, d\xi \qquad \text{et} \qquad \phi_g''(x) = k^2\phi_g(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Justifiez que ϕ_g, ϕ_g' et ϕ_g'' sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et que ϕ_g est l'unique solution de l'équation différentielle $f''(x) - k^2 f(x) = g(x)$ qui est telle que $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

Indication : observez que

$$\phi_g(x) = -\frac{e^{-kx}}{2k}\int_{-\infty}^{x} g(\xi)e^{k\xi}\, d\xi - \frac{e^{kx}}{2k}\int_{x}^{\infty} g(\xi)e^{-k\xi}\, d\xi.$$

(d) Si $g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, montrez que

$$\|\phi_{g_1} - \phi_{g_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\phi'_{g_1} - \phi'_{g_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\phi''_{g_1} - \phi''_{g_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \lesssim \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

$$\|\phi_{g_1} - \phi_{g_2}\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\phi'_{g_1} - \phi'_{g_2}\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\phi''_{g_1} - \phi''_{g_2}\|_{L^1(\mathbb{R})} \lesssim \|g_1 - g_2\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Exercice 7.14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$ et tout $\xi \in K$, supposons que

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \xi^n \right| \overset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Montrez que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7.15 (Théorème de Paley-Wiener)**.** Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et bornée. Supposons que le support de u est inclus dans un intervalle borné $[a, b]$, i.e. $u = 0$ presque partout sur $\mathbb{R} \setminus [a, b]$.

1. Justifiez que $\widehat{u} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, montrez que

$$|\widehat{u}^{(n)}(\xi)| \leq (2\pi)^n (|a| + |b|)^n (b - a) \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

3. Déduisez-en que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{u}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k, \qquad \text{où} \qquad c_k = \frac{(-2i\pi)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} x^k u(x)\, dx.$$

8 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

8.1 Rappels

La transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur linéaire $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ qui à tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ associe un unique $\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. La transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ est compatible avec la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$: si $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $(\mathcal{F}u)(\xi) = \widehat{u}(\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. Cette transformée de Fourier satisfait les mêmes propriétés fondamentales que la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$: le "passage du chapeau" et l'identité de Parseval : pour tous $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}u)(x)v(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)(\mathcal{F}v)(x)\,dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{v(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}u)(\xi)\overline{(\mathcal{F}v)(\xi)}\,dx.$$

De plus, $\mathcal{F}$ est un opérateur borné (continu) : si $(u_k) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sont tels que $u_k \to u$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}u_k \to \mathcal{F}u$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ [1]. La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une bijection isométrique de $L^2(\mathbb{R}^n)$: étant donné $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ avec $\|\mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ et

$$u(x) = (\mathcal{F}\mathcal{F}u)(-x) = (\widetilde{\mathcal{F}\mathcal{F}u})(x) = \mathcal{F}\big(\widetilde{\mathcal{F}u}\big)(x) \quad \text{presque partout dans } \mathbb{R}^n,$$

i.e. il existe un unique $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $u = \mathcal{F}v$ et on a $v(x) = (\mathcal{F}^{-1}u)(x) = (\widetilde{\mathcal{F}u})(x) = (\mathcal{F}u)(-x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Soit $1 \le p < \infty$. Les translations et les dilatations sont continues dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, i.e.

$$\lim_{a \to b} \|\tau_a u - \tau_b u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|\partial_\lambda u - \partial_{\lambda_0} u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$$

pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda_0 \neq 0$, avec $(\tau_a u)(x) := u(x-a)$ et $(\partial_\lambda u)(x) := u(x/\lambda)$.

Proposition 8.1 (Inégalité de Hausdorff-Young)**.** Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

1. Dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, on avait que si $u_k, u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ avec $u_k \to u$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{u_k} \to \widehat{u}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Remarquons que, similairement à ce qui se passe dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, L^∞ est le conjugué de L^1.

8.2 Enoncés des exercices

Exercice 8.2. Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Montrez que, comme pour la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, pour tous $a \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(\tau_a u)(\xi) = e^{-2i\pi a\xi}(\mathcal{F}u)(\xi) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\partial_\lambda u)(\xi) = |\lambda|^n(\mathcal{F}u)(\lambda\xi).$$

Exercice 8.3. Soit $a > 0$. Considérons la fonction $f_a(x) := I_{[-a,a]}(x)$. Calculez $\mathcal{F}f_a$ et déduisez-en la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)^2}{x^2} dx.$$

Indication : utilisez le théorème de Parseval-Plancherel.

Exercice 8.4 (Convolution)**.** Soient $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Justifiez que $u * g \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $ug \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ et que

$$\mathcal{F}(u * g) = \mathcal{F}u\ \mathcal{F}g \quad \text{et} \quad \mathcal{F}u * \mathcal{F}g = \mathcal{F}(ug).$$

Exercice 8.5 (Principe d'incertitude de Heisenberg)**.** Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Heisenberg. Soit $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

1. Justifiez, en intégrant par parties, que

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = -\int_{\mathbb{R}} x\Big(u(x)\overline{u(x)}\Big)' dx = -2\,\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} xu(x)\overline{u'(x)}\,dx\right)$$

2. Déduisez-en que

$$\|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}\|u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \frac{1}{2}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

3. Montrez que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2|u(x)|^2\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\mathcal{F}u(\xi)|^2\,d\xi\right) \geq \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2\,dx\right)^2.$$

   Indication : observez que $\|u'\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}(u')\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

4. Pour quelle(s) fonction(s) a-t-on l'égalité ?
   Indication : résoudre l'équation différentielle $f'(x) = \lambda x f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, pour un $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé.

Transformée de Fourier dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

Rappels

Etant donné $(\psi_k) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on dit que ψ_k converge vers ψ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta (u_k - u)(x)| \overset{k \to \infty}{\to} 0.$$

Définition 8.6. Une distribution tempérée est une application linéaire $\Lambda : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ continue pour la convergence dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. L'ensemble des distributions tempérées est noté $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Définition 8.7. Etant donné une distribution tempérée $\Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, on définit la transformée de Fourier de Λ comme la distribution tempérée $\widehat{\Lambda} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, définie par

$$\langle \widehat{\Lambda}, \psi \rangle := \langle \Lambda, \widehat{\psi} \rangle, \quad \forall\ \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Etant donné une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, s'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty)$ tels que $x \mapsto \frac{f(x)}{(1+|x|)^m} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\langle \Lambda_f, \psi \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)\, dx, \quad \forall\ \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

définit une distribution tempérée.

Enoncés des exercices

Exercice 8.8. Si $(\varphi_k) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ converge vers $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, démontrez que (φ_k) converge vers φ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 8.9. Démontrez que toute distribution tempérée dans $\mathbb{R}^n$ est une distribution dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8.10. Soit μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + \|x\|)^m}\, d\mu(x) < \infty.$$

Démontrez que μ est une distribution tempérée. En particulier, toutes les mesures finies sont des distributions tempérées.

Exercice 8.11. Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, justifiez que $\widehat{u}$ est une distribution tempérée et démontrez que $\widehat{\Lambda_u} = \Lambda_{\widehat{u}}$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. De même, si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, démontrez que $\widehat{\Lambda_u} = \Lambda_{\mathcal{F}u}$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 8.12. Démontrez les affirmations suivantes :

1. La fonction $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ne donne pas lieu à une distribution tempérée.

INDICATION : considérez une suite de fonctions $(\varphi_k) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_k \geq 0$, $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset [0,1]$, $\varphi_k \to 0$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $\int_0^1 \varphi_k(x)\,dx = e^{-k}$. Posez ensuite $\psi_k(x) := \varphi_k(x-k)$.

2. La fonction $f(x) = e^x e^{ie^x}$, $x \in \mathbb{R}$, donne lieu à une distribution témpérée.

   INDICATION : exprimez f comme une dérivée totale pour justifier que $x \mapsto f(x)\psi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 8.13. Etant donné $a \in \mathbb{R}^n$, calculez la transformée de Fourier de δ_a et de 1.

9 Préparation à l'examen

Travailler sérieusement les exercices qui suivent vous fournira une bonne préparation aux exercices de l'examen.

Ces exercices ne seront pas corrigés en séance mais peuvent être abordés lors d'une séance de questions/réponses précédant l'examen.

9.1 Enoncés des exercices

Exercice 9.1. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$ avec $\|T\| \leq 1$. Pour tout $n \geq 1$, on note $T_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k$. Le but de cet exercice est de montrer le "théorème ergodique de Von Neumann" :

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Px \quad \forall x \in H, \tag{9.1}$$

où P est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(I - T)$.

1. Montrez que si $S \in \mathscr{L}(H)$, alors $H = \mathrm{Ker}(S^*) \oplus^\perp \overline{\mathrm{Im}(S)}$, où $\oplus^\perp$ est la somme directe orthogonale.
2. Montrez que $\mathrm{Ker}(I - T) = \mathrm{Ker}(I - T^*)$.
3. Montrez que $\lim_{n\to\infty} T_n x = 0$ pour tout $x \in \overline{\mathrm{Im}(I - T)}$.
4. Montrez (9.1).

Exercice 9.2. Le *Laplacien* Δ est un opérateur différentiel d'ordre 2 défini sur $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$\Delta\varphi := \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 \varphi, \quad \forall\ \varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n).$$

La *divergence* est un opérateur différentiel d'ordre 1 défini sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ par

$$\nabla \cdot U = \sum_{i=1}^{n} \partial_i U_i, \quad \forall\ U \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Fixons $M > 0$ et un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, on a $|x_n| \leq M$.

1. Si $U \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, écrivez l'égalité $\nabla \cdot U = f$ au sens des distributions.
2. Si $u \in L^2(\Omega)$, écrivez l'égalité $-\Delta u = f$ au sens des distributions.
3. Si $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ est tel que $-\Delta u = f$ au sens usuel, peut-on affirmer que l'égalité est vérifiée au sens des distributions ?
4. Si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, nous pouvons étendre φ par zéro en dehors de Ω. Déduisez-en que

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq 2M\|\partial_n\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{9.2}$$

5. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, utilisez la formule de Green pour montrer que
$$\langle -\Delta\varphi, \varphi\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \|\nabla\varphi(x)\|^2\, dx$$
Déduisez du point 4 que
$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq 4M^2 \|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$
6. Définissons $E := \{-\Delta\varphi : \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)\}$. Fixons $f \in L^2(\Omega)$ et considérons
$$L : E \to \mathbb{C} : -\Delta\varphi \mapsto \langle \varphi, f\rangle_{L^2(\Omega)}.$$
Montrez que
   (a) E est un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$;
   (b) L est bien définie ;
   (c) $L \in \mathscr{L}(E, \mathbb{C})$.
7. Démontrez qu'il existe une extension unique $\widetilde{L} \in \mathscr{L}(\overline{E}, \mathbb{C})$ de L telle que $\|\widetilde{L}\| = \|L\|$.
8. Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, concluez qu'il existe $u \in L^2(\Omega)$ tel que $-\Delta u = f$ au sens des distributions.

Exercice 9.3 (Espace de Hardy)**.** On note $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité ouvert.

1. Montrez que $\{(z \mapsto z^n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un système orthogonal de $L^2(\mathbb{D}, dz)$ où dz est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{D}$.
2. Est-ce que $\{(z \mapsto z^n/\|z^n\|) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{D}, dz)$?
   INDICATION : considérez la fonction $(z \mapsto \bar{z}) \in L^2(\mathbb{D}, dz)$.

Considérons l'*espace de Hardy*
$$\mathcal{H}^2(\mathbb{D}) := \Big\{ f \in H(\mathbb{D}) : \lim_{r \overset{<}{\to} 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < +\infty \Big\}.$$

1. Pour tout $f \in H(\mathbb{D})$, montrez que $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ si et seulement si
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n(f)|^2 < +\infty,$$
où $c_n(f) := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ est le n-ième coefficient de Taylor de f en 0.
   INDICATION : montrez que $(r \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it}|^2 dt)$ est une fonction croissante sur $[0, 1[$.
2. Montrez que $(f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{N}})$ est un isomorphisme linéaire entre $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ et $\ell^2(\mathbb{N})$. En déduire une structure d'espace de Hilbert sur $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.
3. Montrez que $\{(z \mapsto z^n) : n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$.

Exercice 9.4. Déterminez toutes les distributions T sur $\mathbb{R}$ telles que $xT = 1$.

Exercice 9.5. Montrez que l'opérateur des ondes $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2$ vérifie $\Box T_E = \delta$, où T_E est la distribution associée à la fonction
$$E(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } t^2 - x^2 > 0 \text{ et } t > 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, montrer que $T_E * f$ est solution de l'équation $\Box u = f$, où u est la fonction inconnue.

Exercice 9.6. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, pour $x \in \mathbb{R}$, à l'aide du théorème des résidus appliqué à la fonction

$$g_\xi(z) := \frac{e^{-i\xi z}}{1+z^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}.$$

Exercice 9.7. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $R > 0$, posons

$$f_R(\xi) := \int_{B(0,R)} f(x) e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\, dx, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

1. Justifier que f_R est bien définie.
2. Justifier que $\mathbb{1}_{B(0,R)} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et démontrer que $\mathbb{1}_{B(0,R)} f \to f$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ lorsque $R \to \infty$.
3. Déduire que $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{B(0,R)} f) \to \mathcal{F}(f)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ lorsque $R \to \infty$.
4. Conclure que $f_R \to \mathcal{F}(f)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ lorsque $R \to \infty$.

Exercice 9.8. Le but de cet exercice est d'obtenir la transformée de Fourier de $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de 1.
2. Montrer qu'une distribution T est impaire[1] si et seulement si $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pour toute fonction paire φ.
3. Montrer que si une distribution tempérée est impaire, alors sa transformée de Fourier est impaire.
4. Montrer que $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$ est une distribution tempérée impaire.
5. En utilisant les points précédents et le fait que $x\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} = 1$, calculer la transformée de Fourier de $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$.

1. On dit que T est une distribution impaire lorsque $\langle T, \widetilde{\varphi}\rangle = -\langle T, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ou $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si T est tempérée